Coimisiún na Scrúduithe Stáit

SCRÚDÚ NA hARDTEISTIMÉIREACHTA, 2004

MATAMAITIC — ARDLEIBHÉAL

PÁIPÉAR 1 (300 marc)

DÉARDAOIN, 10 MEITHEAMH – MAIDIN, 9:30 go dtí 12:00

Freagair **SÉ CHEIST** (50 marc an ceann).

RABHADH: Caillfear marcanna mura dtaispeántar gach obair riachtanach go soiléir.

---

1. **(a)** Sloinn $\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$ sa bhfoirm $a\sqrt{3}-b$, áit a bhfuil a agus $b \in \mathbf{N}$.

(b) **(i)** Bíodh $f(x) = x^3 + kx^2 - 4x - 12$, áit ar tairiseach é k.

Ag glacadh leis gur fachtóir é $x+3$ de $f(x)$, faigh luach k.

(ii) Taispeáin gur tairiseach é

$$\frac{3}{1+x^p} + \frac{3}{1+x^{-p}}\ , \quad \text{nuair a shimplítear go hiomlán é.}$$

(c) **(i)** Taispeáin $p^3 + q^3 - (p+q)^3 = -3pq(p+q)$.

(ii) Uaidh sin, nó ar shlí eile, faigh, i dtéarmaí a agus b, na trí luach ar x ar fíor ina leith $(a-x)^3 + (b-x)^3 - (a+b-2x)^3 = 0$.

2. **(a)** Gan feidhm a bhaint as áireamhán, réitigh na cothromóidí comhuaineacha a leanas:

$$\begin{aligned} 3x + y + z &= 0 \\ x - y + z &= 2 \\ 2x - 3y - z &= 9. \end{aligned}$$

(b) **(i)** Réitigh an éagothroime $\frac{x+1}{x-1} < 4$, áit a bhfuil $x \in \mathbf{R}$ agus $x \neq 1$.

(ii) Is iad α agus β fréamhacha $x^2 + px + q = 0$, áit a bhfuil $p, q \in \mathbf{R}$.

Faigh an chothromóid chearnach ar fréamhacha di $\alpha^2\beta$ agus $\alpha\beta^2$.

(c) **(i)** $f(x) = 2x + 1$, le haghaidh $x \in \mathbf{R}$.
Taispeáin go bhfuil réaduimhir k ann ar fíor ina leith
$f(x + f(x)) = kf(x)$, le haghaidh gach x.

(ii) Taispeáin go bhfuil fréamhacha réadacha ag an gcothromóid chearnach

$$(x-a)(x-b) - h^2 = 0$$

le haghaidh luachanna réadacha ar bith ar a, b agus h.

3. **(a)** Faigh na réaduimhreacha p agus q ar fíor ina leith

$$2(p+iq)+i(p-iq)=5+i, \text{ áit a bhfuil } i^2=-1.$$

(b) **(i)** $z_1=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}$ agus $z_2=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$.

Luacháil z_1z_2, agus bíodh do fhreagra sa bhfoirm $x+iy$.

(ii) $w_1=a+ib$ agus $w_2=c+id$.

Cruthaigh $\overline{(w_1w_2)}=(\overline{w_1})(\overline{w_2})$,

áit gur $\overline{w}$ comhchuingeach coimpléascach w.

(c) Bíodh $A=\begin{pmatrix}1 & -3\\ -1 & 2\end{pmatrix}$ agus $P=\begin{pmatrix}4 & 3\\ -2 & -1\end{pmatrix}$.

(i) Luacháil $A^{-1}PA$ agus uaidh sin luacháil $\left(A^{-1}PA\right)^{10}$.

(ii) Is fíor go bhfuil $\left(A^{-1}PA\right)^{10}=A^{-1}P^{10}A$.

Bain feidhm as an bhfíric sin chun P^{10} a luacháil.

4. **(a)** Taispeáin gut fíor é $3\binom{n}{3}=n\binom{n-1}{2}$ le haghaidh gach uimhir aiceanta $n\geq 3$.

(b) **(i)** Taispeáin $\frac{2}{(2r-1)(2r+1)}=\frac{1}{2r-1}-\frac{1}{2r+1}$, $r\neq\pm\frac{1}{2}$.

(ii) Uaidh sin, faigh $\sum_{r=1}^{n}\frac{2}{(2r-1)(2r+1)}$.

(iii) Luacháil $\sum_{r=1}^{\infty}\frac{2}{(2r-1)(2r+1)}$.

(c) **(i)** Sainítear an seicheamh $u_1,u_2,u_3,......$ ag $u_{n+1}=\sqrt{4-(u_n)^2}$ agus $u_1=a>0$.

Cén luach ar a a thabharfaidh an luach céanna ar gach téarma den seicheamh?

(ii) Is cuid de sheicheamh comhbhreise iad na trí uimhir p,q agus r.

Cruthaigh $p^2+r^2\geq 2q^2$.

5. **(a)** Faigh an cúigiú téarma den fhorbairt

$$\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^6$$

agus taispeáin go bhfuil sé neamhspleách ar x.

(b) **(i)** Is é 8 an dara téarma agus is é 27 an cúigiú téarma de shraith iolraíoch. Faigh an chéad téarma agus an comhiolraitheoir.

(ii) Réitigh $\log_4 x - \log_4 (x-2) = \frac{1}{2}$.

(c) Cruthaigh, trí bhíthin ionduchtaithe, go bhfuil $2^n \geq n^2$, $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 4$.

6. **(a)** Difreáil $\frac{1}{2+5x}$ i leith x.

(b) **(i)** Ag glacadh le $y = \tan^{-1} x$, faigh luach $\frac{dy}{dx}$ ag $x = \sqrt{2}$.

(ii) Difreáil, ó bhunphrionsabail, $\cos x$ i leith x.

(c) Bíodh $f(x) = x^3 + 6x^2 + 15x + 36$, $x \in \mathbf{R}$.

(i) Taispeáin go bhféadfaí $f'(x)$ a scríobh sa bhfoirm $3[(x+a)^2 + b]$, $a, b \in \mathbf{R}$, áit gurb é $f'(x)$ an chéad díorthach de $f(x)$.

(ii) Uaidh sin, taispeáin nach bhfuil ach fréamh réadach amháin ag $f(x) = 0$.

7. **(a)** Léiríonn $s = 12 + 24t - 3t^2$ an fad atá rud ó phointe buan, áit a thomhaistear s i méadair agus t i soicindí. Faigh luas an ruda nuair $t = 3$ shoicind.

(b) Is iad

$$x = 2\theta - \sin 2\theta$$
$$y = 1 - \cos 2\theta$$

cothromóidí paraiméadracha chuair, áit a bhfuil $0 < \theta < \pi$.

(i) Faigh $\frac{dy}{dx}$.

(ii) Taispeáin go bhfuil an tadhlaí don chuar ag $\theta = \frac{\pi}{6}$ ingearach leis an tadhlaí ag $\theta = \frac{2\pi}{3}$.

(c) Má thugtar go bhfuil $x = \frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1}$,

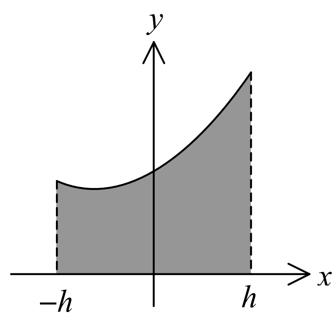
(i) taispeáin go bhfuil $e^{2y} = \frac{1+x}{1-x}$

(ii) taispeáin go bhféadfaí $\frac{dy}{dx}$ a shloinneadh sa bhfoirm $\frac{p}{1-x^q}$, $p, q \in \mathbf{N}$.

8. **(a)** Faigh **(i)** $\int \frac{1}{x^2} dx$ **(ii)** $\int \cos 6x dx$.

(b) Luacháil **(i)** $\int_3^6 \frac{dx}{\sqrt{36 - x^2}}$ **(ii)** $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x \cos^3 x dx$.

(c) Léirítear graf na feidhme $f(x) = ax^2 + bx + c$ ó $x = -h$ go $x = h$ sa léaráid.



(i) Taispeáin gurb é $\frac{h}{3}\left[2ah^2 + 6c\right]$ achar an réigiúin scáthlínithe.

(ii) Ag glacadh leis go bhfuil $f(-h) = y_1$, $f(0) = y_2$ agus $f(h) = y_3$, sloinn achar an réigiúin scáthlínithe i dtéarmaí y_1, y_2, y_3 agus h.