



Coimisiún na Scrúduithe Stáit

SCRÚDÚ NA hARDTEISTIMÉIREACHTA, 2003

MATAMAITIC — ARDLEIBHÉAL

PÁIPÉAR 1 (300 marc)

DÉARDAOIN, 5 MEITHEAMH— MAIDIN, 9:30 go dtí 12:00

Freagair **SÉ CHEIST** (50 marc an ceann).

RABHADH: Caillfear marcanna mura dtaispeántar gach obair riachtanach go soiléir.

1. (a) Sloinn a bhfuil thíos mar chodán singil sa bhfoirm is simplí:

$$\frac{6y}{x(x+4y)} - \frac{3}{2x}.$$

- (b) (i) Tá $f(x) = ax^2 + bx + c$, áit a bhfuil $a, b, c \in \mathbf{R}$.
Ag glacadh le k mar réaduimhir gur fíor ina leith $f(k) = 0$, cruthaigh gur fachtóir é $x - k$ de $f(x)$.
- (ii) Taispeáin gur fachtóir é $2x - \sqrt{3}$ de $4x^2 - 2(1 + \sqrt{3})x + \sqrt{3}$ agus faigh an fachtóir eile.
- (c) $2p$ an difríocht atá idir fréamhacha réadacha $x^2 + 10x + c = 0$, áit a bhfuil $c, p \in \mathbf{R}$ agus $p > 0$.
- (i) Taispeáin $p^2 = 25 - c$.
- (ii) Má ghlactar leis go bhfuil fréamh amháin níos mó ná nialas agus go bhfuil an fhréamh eile níos lú ná nialas, faigh an raon de luachanna féideartha ar p .

2. (a) Réitigh na cothromóidí comhuaineacha:

$$\begin{aligned} 3x - y &= 8 \\ x^2 + y^2 &= 10. \end{aligned}$$

- (b) (i) Réitigh le haghaidh x :
- $$|4x + 7| < 1.$$
- (ii) Má thugtar gur fachtóir é $x^2 - ax - 3$ de $x^3 - 5x^2 + bx + 9$, áit a bhfuil $a, b \in \mathbf{R}$, faigh luach a agus luach b .
- (c) (i) Réitigh le haghaidh y :
- $$2^{2^{y+1}} - 5(2^y) + 2 = 0.$$
- (ii) Má thugtar gurb iad $x = \alpha$ agus $x = \beta$ réitigh na cothromóide cearnaí $2k^2x^2 + 2ktx + t^2 - 3k^2 = 0$, áit a bhfuil $k, t \in \mathbf{R}$ agus $k \neq 0$, taispeáin go bhfuil $\alpha^2 + \beta^2$ neamhspleách ar k agus t .

3. (a) Luacháil $(1 \ -2) \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.
- (b) (i) Má thugtar $z = 2 - i$, ríomh $|z^2 - z + 3|$, áit a bhfuil $i^2 = -1$.
- (ii) Is réaduimhir é k gur fíor ina leith $\frac{-1 + i\sqrt{3}}{-4\sqrt{3} - 4i} = ki$.
Faigh k .
- (c) Is iad $1, \omega, \omega^2$ trí fhréamh na cothromóide $z^3 - 1 = 0$.
- (i) Cruthaigh $1 + \omega + \omega^2 = 0$.
- (ii) Uaidh sin, faigh luach $(1 - \omega - \omega^2)^5$.
4. (a) Sloinn an deachúil athfhillteach $0.252525 \dots$ sa bhfoirm $\frac{p}{q}$, áit a bhfuil $p, q \in \mathbb{N}$ agus $q \neq 0$.
- (b) I sraith chomhbhreise, tá an dara téarma móide an cúigiú téarma cothrom le 18. Tá an séú téarma níos mó ná an tríú téarma de 9.
- (i) Faigh an chéad téarma agus an chomhbheis.
- (ii) Cad é an luach is ísle atá ar n gur fíor ina leith $S_n > 600$, áit gurb é S_n suim an chéad n téarma den tsraith?
- (c) (i) Is seicheamh é $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, \dots$ áit a bhfuil $u_1 = 2$ agus $u_{n+1} = (-1)^n u_n + 3$.
Luacháil u_2, u_3, u_4, u_5 agus u_{10} .
- (ii) Is iad a, b, c, d an chéad, an dara, an tríú agus an ceathrú téarma, faoi seach, de sheicheamh iolraíoch.
Cruthaigh $a^2 - b^2 - c^2 + d^2 \geq 0$.

5. (a) Réitigh le haghaidh x :

$$x = \sqrt{7x - 6} + 2.$$

- (b) Bain feidhm as ionduchtú chun a chruthú gur fachtóir é 8 de $7^{2n+1} + 1$, áit gur slánuimhir dheimhneach ar bith é n .

- (c) Agus forbairt dhéthéarmach $\left(ax + \frac{1}{bx}\right)^8$ san áireamh agat, áit gur réaduimhreacha neamhnialasacha iad a agus b ,

- (i) scríobh síos an téarma ginearálta
(ii) má thugtar gur ionann comhéifeacht x^2 agus comhéifeacht x^4 , taispeáin $ab = 2$.

6. (a) Dífreáil $\sqrt{1+4x}$ i leith x .

- (b) Taispeáin go bhfuil fréamh idir 2 agus 3 ag an gcothromóid $x^3 - 4x - 2 = 0$.

Ag glacadh le $x_1 = 2$ mar an chéad mheastachán den fhréamh sin, bain feidhm as modh Newton-Raphson chun x_3 , an tríú meastachán, a fháil. Bíodh do fhreagra ceart go dtí dhá ionad de dheachúlacha.

- (c) Sainítear an fheidhm $f(x) = \frac{1}{1-x}$ le haghaidh $x \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$.

- (i) Cruthaigh nach bhfuil pointe casta ar bith ná pointe athchasta ar bith ag graf f .

- (ii) Scríobh síos fáth amháin atá leis an ráiteas:

“tá f ag méadú ag gach luach $x \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$ ”.

- (iii) Ag glacadh leis gur tadhlaí é $y = x + k$ do ghraf f , áit gur réaduimhir é k , faigh an dá luach fhéideartha ar k .

7. (a) Dífreáil gach aon cheann díobh seo a leanas i leith x :

(i) $\cos^4 x$ (ii) $\sin^{-1} \frac{x}{5}$.

(b) (i) Is iad

$$x = \cos t + t \sin t$$

$$y = \sin t - t \cos t, \text{ áit a bhfuil } 0 < t < \frac{\pi}{2},$$

cothromóidí paraiméadracha cuair.

Faigh $\frac{dy}{dx}$ agus bíodh do fhreagra sa bhfoirm is simplí.

(ii) Ag glacadh le $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{6}$, faigh luach $\frac{dy}{dx}$ ag an bpointe $(2, -3)$.

(c) (i) Ag glacadh le $y = \ln \frac{1+x^2}{1-x^2}$, le haghaidh $0 < x < 1$,

faigh $\frac{dy}{dx}$ agus bíodh do fhreagra sa bhfoirm $\frac{kx}{1-x^k}$, áit a bhfuil $k \in \mathbf{N}$.

(ii) Ag glacadh le $f(\theta) = \sin(\theta + \pi) \cos(\theta - \pi)$, faigh díorthach $f(\theta)$ agus sloinn é sa bhfoirm $\cos n\theta$, áit a bhfuil $n \in \mathbf{Z}$.

8. (a) Faigh (i) $\int (x^3 + 2) dx$ (ii) $\int e^{7x} dx$.

(b) (i) Luacháil $\int_0^1 \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} dx$.

(ii) Trí $u = \sin x$ a fheidhmiú, luacháil $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin^6 x dx$.

(c) (i) Taispeáin $\int_a^{2a} \sin 2x dx = \sin 3a \sin a$.

(ii) Bain feidhm as modhanna suimeála chun a thaispeáint gurb é $\frac{4}{3}\pi r^3$ toirt sféir ar ga dó r .