AN ROINN OIDEACHAIS AGUS EOLAÍOCHTA

SCRÚDÚ NA hARDTEISTIMÉIREACHTA, 2001

MATAMAITIC — ARDLEIBHÉAL

PÁIPÉAR 1 (300 marc)

DÉARDAOIN, 7 MEITHEAMH — MAIDIN, 9.30 go dtí 12.00

Freagair **SÉ CHEIST** (50 marc an ceann).

RABHADH: Féadfar marcanna a chailliúint mura dtaispeántar gach obair riachtanach go soiléir.

---

1. **(a)** Faigh na réaduimhreacha a agus b ar fíor ina leith

$$x^2 + 4x - 6 = (x + a)^2 + b \quad \text{le haghaidh gach} \quad x \in \mathbf{R}.$$

(b) Bíodh $f(x) = 2x^3 + mx^2 + nx + 2$ áit arb tairisigh iad m agus n.

Más fachtóirí iad $x - 1$ agus $x + 2$ de $f(x)$, faigh an luach ar m agus an luach ar n.

(c) Is fachtóir $x^2 - px + q$ de $x^3 + 3px^2 + 3qx + r$.

(i) Taispeáin go bhfuil $q = -2p^2$.

(ii) Taispeáin go bhfuil $r = -8p^3$.

(iii) Faigh, i dtéarmaí p, na trí fhréamh de $x^3 + 3px^2 + 3qx + r = 0$.

2. **(a)** Réitigh na cothromóidí comhuaineacha

$$x - y = 0$$
$$(x + 2)^2 + y^2 = 10.$$

(b) **(i)** Réitigh le haghaidh x:

$$|3x + 5| < 4.$$

(ii) Simpligh $\left(x^2 + \sqrt{2} + \frac{1}{x^2}\right)\left(x^2 - \sqrt{2} + \frac{1}{x^2}\right)$ agus sloinn do fhreagra sa bhfoirm $x^n + \frac{1}{x^n}$, áit arb slánuimhir í n.

(c) Réaduimhreacha iad α agus β sa chaoi go bhfuil $\alpha + \beta = -7$ agus $\alpha\beta = 11$.

(i) Taispeáin go bhfuil $\alpha^2 + \beta^2 = 27$.

(ii) Faigh cothromóid chearnach arb fréamhacha di $\frac{\alpha}{\beta}$ agus $\frac{\beta}{\alpha}$ agus scríobh do fhreagra sa bhfoirm $px^2 + qx + r = 0$ áit a bhfuil $p, q, r \in \mathbf{Z}$.

3. **(a)** Bíodh $u = \dfrac{1+3i}{3+i}$ áit a bhfuil $i^2 = -1$.

(i) Sloinn u sa bhfoirm $a + ib$ áit a bhfuil $a, b \in \mathbf{R}$.

(ii) Luacháil $|u|$.

(b) **(i)** Scríobh na cothromóidí comhuaineacha

$$x - \sqrt{3}y = -2$$
$$\sqrt{3}x + y = 2\sqrt{3}$$

sa bhfoirm $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix}$ áit arb maitrís 2×2 í A.

(ii) Ansin, faigh A^{-1} agus bain feidhm as chun na cothromóidí a réiteach le haghaidh x agus le haghaidh y.

(c) **(i)** Scríobh $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ sa bhfoirm $ax^2 + bxy + cy^2$ áit a bhfuil $a, b, c \in \mathbf{Z}$.

(ii) Taispeáin gur fachtóir é $z^2 - 16$ de $z^3 + (1+i)z^2 - 16z - 16(1+i)$ agus uaidh sin, faigh na trí fhréamh de $z^3 + (1+i)z^2 - 16z - 16(1+i) = 0$.

4. **(a)** Léiríonn $S_n = 3n^2 - 4n$ suim an chéad n téarma de shraith chomhbhreise.

Bain feidhm as S_n chun **(i)** an chéad téarma, T_1, a fháil
(ii) suim an dara agus an tríú téarma le chéile, $T_2 + T_3$, a fháil.

(b) **(i)** Taispeáin $\dfrac{1}{(n+2)(n+3)} = \dfrac{1}{n+2} - \dfrac{1}{n+3}$ le haghaidh $n \in \mathbf{N}$.

(ii) Uaidh sin, faigh $\displaystyle\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{(n+2)(n+3)}$ agus luacháil $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)}$.

(c) **(i)** Scríobh $\dfrac{n^3+8}{n+2}$ sa bhfoirm $an^2 + bn + c$ áit a bhfuil $a, b, c \in \mathbf{R}$.

(ii) Uaidh sin, luacháil $\displaystyle\sum_{n=1}^{30} \frac{n^3+8}{n+2}$.

[A nótáil: $\displaystyle\sum_{n=1}^{k} n = \frac{k}{2}(k+1)$; $\displaystyle\sum_{n=1}^{k} n^2 = \frac{k}{6}(k+1)(2k+1)$.]

5. **(a)** Is é 21 an dara téarma, T_2, de sheicheamh iolraíoch.
Is é -63 an tríú téarma, T_3.

Faigh **(i)** an chomhiolraitheoir

(ii) an chéad téarma.

(b) **(i)** Réitigh $\log_6(x+5) = 2 - \log_6 x$ le haghaidh $x > 0$.

(ii) Sa bhforbairt déthéarmach $(1+kx)^6$ is é 240 comhéifeacht x^4.

Faigh an dá luach réadach fhéideartha ar k.

(c) Bain feidhm as ionduchtú chun a chruthú go bhfuil

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

nuair is slánuimhir dheimhneach í n agus i gcás gach $\theta \in \mathbf{R}$ agus $i^2 = -1$.

6. **(a)** Difreáil $\dfrac{x}{1+x^2}$ i leith x.

(b) **(i)** Ag glacadh leis go bhfuil $y = \sqrt{x}$, cad is $\dfrac{dy}{dx}$ ann?

(ii) Anois, faigh, ó bhunphrionsabail, díorthach $\sqrt{x}$ i leith x.

(c) Bíodh $x = t^2e^t$ agus $y = t + 2\ln t$ le haghaidh $t > 0$.

(i) Faigh $\dfrac{dx}{dt}$ agus $\dfrac{dy}{dt}$ i dtéarmaí t.

(ii) Uaidh sin, taispeáin go bhfuil $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x}$.

7. **(a)** Ag glacadh leis gurb é $x_1 = 1$ an chéad gharlauch do fhréamh réadach na cothromóide

$$x^3 + x^2 - 1 = 0,$$

bain feidhm as an modh Newton-Raphson chun x_2, an dara garluach a fháil.

(b) **(i)** Difreáil $\tan^{-1} 7x$ i leith x.

(ii) Ag glacadh leis go bhfuil $y = \sin x \cos x$, faigh $\frac{dy}{dx}$ agus sloinn é sa bhfoirm $\cos nx$ áit a bhfuil $n \in \mathbf{Z}$.

(c) Bíodh $g(x) = x^2 + \frac{a}{x^2}$ áit ar réaduimhir í a agus $x \in \mathbf{R}$, $x \neq 0$.

Ag glacadh leis go bhfuil pointe casta ag $g(x)$ ag an bpointe $x = 2$,

(i) faigh an luach ar a

(ii) cruthaigh nach bhfuil uasphointe logánta ar bith ag $g(x)$.

8. **(a)** Faigh **(i)** $\int \frac{1}{x^3} dx$ **(ii)** $\int \sin 5x dx$.

(b) Luacháil **(i)** $\int_0^3 \frac{12}{x^2 + 9} dx$ **(ii)** $\int_0^4 \frac{(x+4)}{\sqrt{x^2 + 8x + 1}} dx$.

(c) Is réaduimhir í a ar fíor ina leith $0 < a < 8$.

Trasnaíonn an líne $y = ax$ an cuar $y = x(8 - x)$ ag $x = 0$ agus ag $x = p$.

(i) Taispeáin go bhfuil $p = 8 - a$.

(ii) Taispeáin gur $\frac{p^3}{6}$ aonad cearnach an t-achar atá iata idir an cuar agus an líne.