M 29T

AN ROINN OIDEACHAIS AGUS EOLAÍOCHTA

SCRÚDÚ ARDTEISTIMÉIREACHTA, 2000

MATAMAITIC — ARDLEIBHÉAL — PÁIPÉAR 1 (300 marc)

DÉARDAOIN, 8 MEITHEAMH — MAIDIN, 9.30 go dtí 12.00

SÉ CHEIST a fhreagairt (50 marc an ceann).

Is féidir go gcaillfí marcanna mura dtaispeántar obair riachtanach go soiléir.

1. **(a)** Taispeáin go bhfuil an slonn thíos tairiseach nuair $x \neq 2$

$$\frac{3x-5}{x-2}+\frac{1}{2-x}.$$

(b) Tá $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, áit a bhfuil $a,\ b,\ c,\ d \in \mathbf{R}$.

Más réaduimhir í k gur fíor ina leith $f(k)=0$, cruthaigh gur fachtóir é $x-k$ de $f(x)$.

(c) Is fachtóir é $(x-t)^2$ de $x^3+3px+c$.

Taispeáin

(i) $p=-t^2$

(ii) $c=2t^3$.

2. **(a)** Réitigh le haghaidh x, y, z

$$\begin{aligned} 3x-y+3z&=1\\ x+2y-2z&=-1\\ 4x-y+5z&=4. \end{aligned}$$

(b) Réitigh $x^2-2x-24=0$.

Uaidh sin, faigh na luachanna ar x gur fíor ina leith

$$\left(x+\frac{4}{x}\right)^2-2\left(x+\frac{4}{x}\right)-24=0, \qquad x\in \mathbf{R},\ x\neq 0.$$

(c) **(i)** Réalaigh a^4-b^4 mar thoradh de thrí fhachtóir.

(ii) Fachtóirigh $a^5-a^4b-ab^4+b^5$.

Bain feidhm as do chuid freagraí ar **(i)** agus **(ii)** chun a thaispeáint go bhfuil

$$a^5+b^5>a^4b+ab^4$$

áit ar réaduimhreacha neamhchothroma deimhneacha iad a agus b.

3. **(a)** Ag glacadh leis go bhfuil A = $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ agus B = $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$, faigh $B^{-1}A$.

(b) **(i)** Simpligh $\left(\frac{-2+3i}{3+2i}\right)$ agus uaidh sin, faigh an luach ar $\left(\frac{-2+3i}{3+2i}\right)^9$, áit a bhfuil $i^2 = -1$.

(ii) Faigh an dá uimhir choimpléascacha $a+ib$ gur fíor ina leith

$$(a+ib)^2 = 15 - 8i.$$

(c) Bain feidhm as teoirim De Moivre

(i) chun a chruthú go bhfuil $\cos 3q = 4\cos^3 q - 3\cos q$

(ii) chun $\left(-\sqrt{3}-i\right)^{10}$ a réalú sa bhfoirm $2^n\left(1-i\sqrt{k}\right)$, áit a bhfuil $n,\ k \in \mathbf{N}$.

4. **(a)** Is iad

$$2x-4,\quad x+1,\quad x-3$$

an chéad trí théarma de sheicheamh iolraíoch.

Faigh an dá luach fhéideartha ar x.

(b) Ag glacadh leis go bhfuil

$$u_n = \frac{1}{2}\left(4^n - 2^n\right)$$

le haghaidh gach slánuimhreach n, taispeáin

$$u_{n+1} = 2u_n + 4^n.$$

(c) **(i)** Ag glacadh leis go bhfuil

$g(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 \ldots$, áit a bhfuil $-1 < x < 1$, taispeáin go bhfuil

$$g(x) = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

(ii) Tá $P(n) = u_1 u_2 u_3 u_4 \ldots\ u_n$ áit a bhfuil

$u_k = ar^{k-1}$ le haghaidh $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ agus $a, r \in \mathbf{R}$.

Scríobh $P(n)$ sa bhfoirm $a^n r^{f(n)}$, áit ar shlonn cearnógach, in n, é $f(n)$.

5. **(a)** Réalaigh an deachúil athfillteach $1.\dot{2}$ sa bhfoirm $\frac{a}{b}$, áit a bhfuil $a, b \in \mathbf{N}$.

(b) Bain feidhm as ionduchtú chun a chruthú go bhfuil $n! > 2^n$, $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 4$.

(c) **(i)** Réitigh le haghaidh x

$$2\log_9 x = \frac{1}{2} + \log_9(5x + 18), \quad x > 0.$$

(ii) Réitigh le haghaidh x

$$3e^x - 7 + 2e^{-x} = 0.$$

6. **(a)** Difreáil i leith x

(i) $(1+5x)^3$

(ii) $\frac{7x}{x-3}, \quad x \neq 3.$

(b) **(i)** Cruthaigh riail an toraidh

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

ó bhunphrionsabail, áit a bhfuil $u = u(x)$ agus $v = v(x)$.

(ii) Ag glacadh leis go bhfuil $y = \sin^{-1}(2x-1)$, faigh $\frac{dy}{dx}$ agus ríomh a luach nuair $x = \frac{1}{2}$.

(c) Tá $f(x) = \frac{1}{x+1}$, áit a bhfuil $x \in \mathbf{R}$, $x \neq -1$.

(i) Faigh cothromóidí na n-asamtóití den ghraf de $f(x)$.

(ii) Cruthaigh nach bhfuil pointe casta ná pointe athchasta ar bith ar an ngraf de $f(x)$.

(iii) Má tá na tadhlaithe don chuar ag $x = x_1$ agus $x = x_2$ comhthreomhar lena chéile agus más fíor $x_1 \neq x_2$, taispeáin

$$x_1 + x_2 + 2 = 0.$$

7. **(a)** Faigh fána an tadhlaí don chuar

$$x^2 - xy + y^2 = 1 \text{ ag an bpointe } (1,0).$$

(b) Is iad

$$x = \cos^3 t \quad \text{agus} \quad y = \sin^3 t, \quad 0 \le t \le \frac{p}{2},$$

na cothromóidí paraiméadracha de chuar.

(i) Faigh $\frac{dx}{dt}$ agus $\frac{dy}{dt}$ i dtéarmaí t.

(ii) Uaidh sin, faigh slánuimhreacha a agus b gur fíor ina leith

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \frac{a}{b}(\sin 2t)^2 .$$

(c) Tá $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, áit a bhfuil $x > 0$.

(i) Taispeáin go dtarlaíonn uasluach $f(x)$ ag an bpointe $\left(e, \frac{1}{e}\right)$.

(ii) Uaidh sin, taispeáin $x^e \le e^x$ le haghaidh gach $x > 0$.

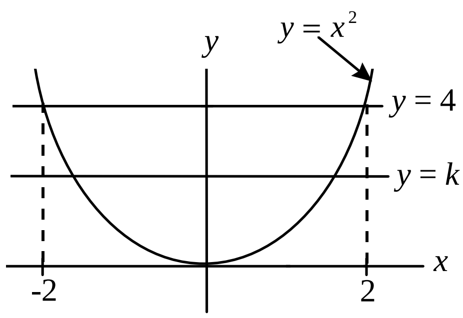
8. **(a)** Faigh **(i)** $\int (x^2 + 2)dx$ **(ii)** $\int e^{3x} dx.$

(b) Luacháil **(i)** $\int_0^{\frac{p}{2}} \sin^2 3q \, dq$ **(ii)** $\int_0^1 \frac{x}{x^2+4} dx .$

(c) **(i)** Faigh an luach ar an réaduimhir p gur fíor ina leith

$$\int_2^p \frac{dx}{x^2 - 4x + 5} = \frac{p}{4}.$$

(ii) An réigiún atá iata ag an gcuar $y = x^2$ agus an líne $y = 4$, tá sé roinnte i ndá réigiún atá ar chomhachar ag an líne $y = k$.
Taispeáin $k^3 = 16$.



AN ROINN OIDEACHAIS AGUS EOLAÍOCHTA

SCRÚDÚ NA hARDTEISTIMÉIREACHTA, 2000

MATAMAITIC—ARDLEIBHÉAL
PÁIPÉAR 2 (300 marc)

DÉ hAOINE, 9 MEITHEAMH — MAIDIN, 9.30 go dtí 12.00

Freagair **cúig** cheist as Roinn **A** agus ceist **amháin** as Roinn **B**.
Tá 50 marc ag dul do gach ceist.

Is féidir go gcaillfí marcanna mura dtaispeántar gach obair riachtanach go soiléir.

ROINN A

Freagair CÚIG cheist as an roinn seo.

---

1. **(*a*)** Cothromóid chiorcail is ea $x^2 + y^2 = 130$.

Faigh fána an tadhlaí don chiorcal ag an bpointe $(-7, 9)$.

(*b*) Cothromóid chiorcail is ea $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$.

Comhordanáidí a láir agus fad a gha a scríobh síos.

Cothromóid chiorcail eile is ea $x^2 + y^2 + 12x - 20y + k = 0$, $k \in \mathbf{R}$.

Tadhlann an dá chiorcal a chéile go seachtrach. Faigh an luach ar k.

(*c*) Déantar ciorcal a thrasnú ag líne ag na pointí $a(-3, 0)$ agus $b(5, -4)$.

Lárphointe $[ab]$ is ea m. Faigh comhordanáidí m.

Is é $\sqrt{5}$ an fad slí idir lár an chiorcail agus m.

Faigh cothromóidí an dá chiorcal a chomhlíonann na coinníollach sin.

2. **(*a*)** Tá $\vec{v} = t\,\vec{i} - 8\vec{j}$, áit a bhfuil $t \in \mathbf{R}$.

Faigh an dá luach fhéideartha ar t gur fíor ina leith $|\vec{v}| = 17$.

(*b*) Tá $\vec{a} = 2\,\vec{i} + (2k + 3)\,\vec{j}$ agus tá $\vec{b} = k^2\,\vec{i} + 6\,\vec{j}$, áit a bhfuil $k \in \mathbf{Z}$.

Tá $\vec{a}$ ingearach le $\vec{b}$.

(i) Faigh an luach ar k.

(ii) Ag baint feidhme duit as do luach ar k, scríobh $\vec{a} + \vec{b}$ i dtéarmaí $\vec{i}$ agus $\vec{j}$.

(iii) Uaidh sin, faigh tomhas na huillinne idir $\vec{a}$ agus $\vec{a} + \vec{b}$ ceart go dtí an chéim is gaire.

(*c*) **(i)** Tá $\vec{p} + \vec{q} = 5\vec{i} - 5\vec{j}$ agus $\vec{pq} = 3\vec{i} + \vec{j}$.

Réalaigh $\vec{p}$ agus $\vec{q}$ i dtéarmaí $\vec{i}$ agus $\vec{j}$.

(ii) Ag glacadh leis go bhfuil $\vec{r} = \dfrac{\vec{p}.\vec{q}}{\vec{q}.\vec{q}}\,\vec{q}$, réalaigh $\vec{r}$ i dtéarmaí $\vec{i}$ agus $\vec{j}$.

(iii) Ag glacadh leis go bhfuil $\vec{s} = \dfrac{7}{2}\,\vec{i} + m\,\vec{j}$, $m \in \mathbf{Q}$, faigh an luach ar m gur fíor ina leith an bunphointe, r agus s a bheith comhlíneach.

3. **(*a*)** Cothromóid líne L is ea $14x + 6y + 1 = 0$.

Faigh cothromóid na líne atá ingearach le L agus a ghabhann an pointe $(3, -2)$.

(*b*) Dhá phointe iad $a(1, -2)$ agus $c(-4, 8)$.

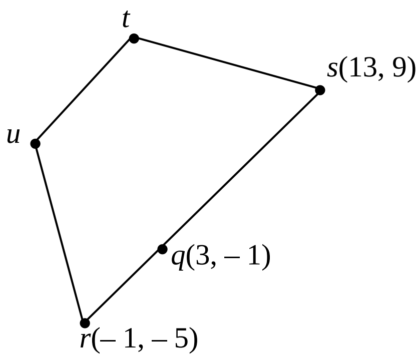
Is é f an t-inmhapa $(x, y) \to (x', y')$ áit a bhfuil $x' = 2x - 3y$ agus $y' = 6x + y$.

(i) Tá $[ac]$ roinnte ag b sa chóimheas $3 : 2$. Faigh comhordanáidí b.

(ii) Faigh $f(a)$, $f(b)$ agus $f(c)$.

(iii) Fíoraigh $|f(a)f(b)| : |f(b)f(c)| = |ab| : |bc|$.

(*c*) Is ceathairshleasán é $rstu$, áit arb r is $(-1, -5)$ agus s is $(13, 9)$.
Luíonn $q(3, -1)$ idir r agus s.



(i) Comhordanáidí u is ea $(-2k, 3k)$ áit a bhfuil $k \in \mathbf{R}$ agus $k > 0$.

Achar an triantáin rqu is ea 28 aonad cearnach.

Faigh an luach ar k.

(ii) Is é $-\frac{3}{11}$ fána ts.
Tá sr comhthreomhar le tu.

Faigh comhordanáidí t.

4. **(*a*)** Is é 27 cm^2 an t-achar atá ag teascóg chiorcail agus is é 6 cm an fad atá i nga an chiorcail.

Faigh, i raidiain, tomhas na huillinne sa teascóg.

(*b*) Faigh na réitigh uile den chothromóid

$$15\sin^2 x - 4\cos x - 11 = 0$$

sa bhfearann $0° \le x \le 360°$. Bíodh do fhreagra ceart go dtí an chéim is gaire.

(*c*) **(i)** Bunaigh an fhoirmle $\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$.

(ii) Taispeáin go bhfuil $\cos(A+B)\cos B + \sin(A+B)\sin B = \cos A$.

5. **(*a*)** Luacháil **(i)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 5x}{x}$ **(ii)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x}{\sin x}$.

(teor = lim)

(*b*) **(i)** Taispeáin $\dfrac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A} = \cos 2A$.

(ii) Uaidh sin, nó as slí eile, faigh na luachanna ar na slánuimhreacha l agus k gur fíor ina leith

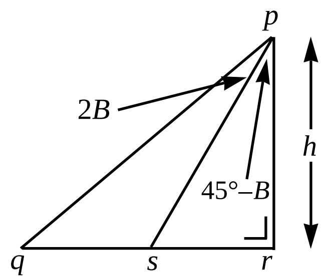
$$\frac{1 - \tan^2 (135° - A)}{1 + \tan^2 (135° - A)} = l \sin kA$$

le haghaidh na luachanna uile ar A ag a bhfuil $\tan(135° - A)$ sainithe.

(*c*) Sa triantán pqr, tá $|\angle qrp| = 90°$ agus tá $|rp| = h$.

Pointe ar $[qr]$ is ea s gur fíor ina leith $|\angle spq| = 2B$ agus

$|\angle rps| = 45° - B$, $0° < B < 45°$.



(i) Taispeáin $|sr| = h \tan(45° - B)$.

(ii) Uaidh sin, nó as slí eile, taispeáin $|qs| = 2h \tan 2B$.

6. **(*a*)** Baineann banc feidhm as na luibhne 0 go dtí 9, iad araon san áireamh, chun uimhir aitheantais phearsanta ina bhfuil ceithre luibhean a thabhairt do gach duine de a chuid custaiméirí. Eiseamláirí iad 2475, 0865 agus 3422.

(i) Cad é an líon d'uimhreacha aitheantais pearsanta éagsúla is féidir leis an mbanc a úsáid?

(ii) Má chinneann an banc gan uimhreacha aitheantais pearsanta a thosaíonn ar 0 a úsáid, cad é an líon d'uimhreacha is féidir leis an mbanc a úsáid ansan?

(*b*) **(i)** Réitigh an difearchothromóid $12u_{n+2} - 8u_{n+1} + u_n = 0$,

áit a bhfuil $n \geq 0$ agus ag glacadh leis go bhfuil $u_0 = \dfrac{1}{15}$ agus $u_1 = \dfrac{7}{30}$.

(ii) Uaidh sin, réalaigh u_3 sa bhfoirm $\dfrac{p}{q}$ áit a bhfuil $p, q \in \mathbf{N}$.

(*c*) Lonnaítear sé dhiosca dhearga, uimhrithe ó 1 go dtí 6, mar aon le ceithre dhiosca ghlasa, uimhrithe ó 7 go dtí 10, i mbosca A.

Lonnaítear deich ndiosca ghorma, uimhrithe ó 1 go dtí 10, i mbosca B.

Déantar dhá dhiosca a thoghadh as bosca A agus dhá dhiosca a thoghadh as bosca B. Déantar na ceithre dhiosca a thoghadh go fánach agus gan iad a athshuíomh.

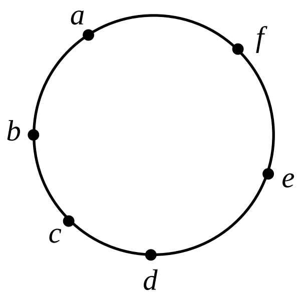
Faigh an dóchúlacht

(i) gur dhá dhiosca dhearga, iad mar aon le dhá dhiosca ghorma atá ré-uimhrithe, iad na dioscaí a toghadh

(ii) gur diosca dearg amháin, gur diosca glas amháin mar aon le dhá dhiosca ghorma, iad uile corruimhreach, na dioscaí a toghadh

(iii) gur diosca dearg amháin, gur diosca glas amháin mar aon le dhá dhiosca ghorma sa chaoi go bhfuil suim na n-uimhreacha ar an diosca dearg agus an diosca glas le chéile cothrom le 10 agus suim na n-uimhreacha ar na dioscaí gorma cothrom le 10, freisin, na dioscaí a toghadh.

7. **(*a*)** Tá na pointí a, b, c, d, e agus f ar chiorcal.



(i) Má bhaintear feidhm as na pointí sin mar stuaiceanna, cé mhéad ceathairshleasán eágsúil is féidir a chumadh?

(ii) Cé mhéad de na ceathairshleasáin sin ina mbeidh [ab] mar shlios amháin díobh?

(*b*) Déantar trí chárta a thoghadh, go fánach agus gan iad a athshuíomh, as paca de 52 cárta imeartha.

Faigh an dóchúlacht

(i) gurb iad an Cuireata triuf, an Bhanríon triuf agus an Rí triuf na trí chárta a toghadh

(ii) gurb é an t-aon gach cárta a toghadh

(iii) gur dubh é dhá chárta agus gur muileata é cárta amháin

(iv) gur den dath céanna (dubh nó dearg) gach ceann de na trí chárta.

(*c*) Is é $\overline{x}$ an meán atá ag na réaduimhreacha q, r, s agus t agus is é σ an diall caighdeánach.

Dearc ar na huimhreacha

$$\beta q + \alpha,\ \ \beta r + \alpha,\ \ \beta s + \alpha \ \text{ agus } \ \beta t + \alpha$$

áit a bhfuil $\beta, \alpha \in \mathbf{R}$ agus $\beta > 0$.

(i) Taispeáin gurb é $\beta\overline{x} + \alpha$ an meán de na huimhreacha sin.

(ii) Taispeáin gurb é $\beta\sigma$ an diall caighdeánach de na huimhreacha sin.

ROINN B

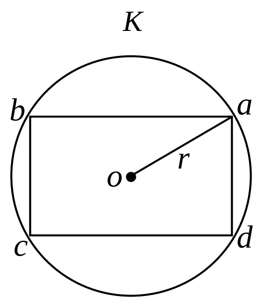
Freagair ceist AMHÁIN as an roinn seo.

---

8. (*a*) Bain feidhm as tástáil an chóimheasa chun a thaispeáint go bhfuil $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)!}{2^{n+2}}$ eisréimneach.

(*b*) **(i)** Bain feidhm as mírshuimeáil chun $\int e^{2x} \cos x dx$ a fháil.

(ii) Ag glacadh leis go bhfuil $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos x dx = \frac{1}{n}(e^{\pi} - 2)$, faigh an luach ar n áit a bhfuil $n \in \mathbf{N}$.



(*c*) Is é o lár an chiorcail K.

Cumtar dronuilleog $abcd$ leis na pointí a, b, c agus d atá ar K.

$|oa| = r$ cm; $|ab| = 2x$ cm agus $|ad| = 2y$ cm.

(i) Réalaigh y i dtéarmaí x agus r.

(ii) Uaidh sin, nó as slí eile, taispeáin gurb é $2r^2$ cm^2 uasachar $abcd$.

9. (*a*) Tá trí thicéad déag i gcrannchur. Is gorm iad sé cinn de na ticéid, is dearg iad ceithre cinn díobh agus is glas iad trí cinn.

Déantar trí thicéad a thoghadh go fánach agus gan iad a athshuíomh, ceann amháin ina dhiaidh an chinn eile.

Faigh an dóchúlacht gur gorm é an chéad ticéad a thoghtar, gur dearg é an dara ceann agus gur dearg nó glas é an tríú ceann.

(*b*) Tá an dáileadh normalach ar meán 165 cm agus ar diall caighdeánach 10 cm, ar airdeanna na mac léinn i gcoláiste ar leith. Má dhéantar mac léinn a thoghadh go fánach, faigh an dóchúlacht go bhfuil airde an mhic léinn

(i) níos lú ná 170 cm

(ii) idir 160 cm agus 180 cm.

(*c*) Rinneadh taifid ar luasanna de 150 carr a toghadh go fánach agus iad ag gabháil thar phointe seiceála ar mhórbhóthar. Ba é 115 km/u meánluas na gcarranna agus ba é 24 km/u an diall caighdeánach. Is é 112 km/u an luasteorainn ar an mhórbhóthar.

(i) An léiríonn a leithéid, ag an leibhéal suntasachta de 5%, go bhfuil meánluas na gcarranna a ghabhann thar an phointe seiceála níos mó ná an luasteorainn?

(ii) Faigh an t-eatramh muiníne 95% i gcás mheánluas na gcarranna a ghabhann thar an phointe seiceála, ceart go dtí ionad amháin de dheachúlacha.

10. **(*a*)** Is é G = $\{R_{0°}, R_{120°}, R_{240°}\}$ an tacar de shiméadrachtaí rothlacha de thriantán comhshleasach.

Taispeáin gur ghrúpa é G faoi chomhshuíomh. Is féidir leat glacadh leis go bhfuil comhshuíomh comhthiomsaitheach.

(*b*) Tá H = $\{e, f, g, h, m, p, s, t\}$ áit a bhfuil

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix},\ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix},\ g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$m = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix},\ p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix},\ s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Is grúpa é H, $\circ$, áit a chomharthaíonn $\circ$ comhshuíomh na n-eagar.

(i) Iniúch an bhfuil $f \circ m = m \circ f$.

(ii) Tá an t-ord céanna ag na baill g, m, p, s agus t. Cad é an t-ord sin?

(iii) Tá an t-ord céanna ag na baill f agus h. Cad é an t-ord sin?

(iv) Faigh an foghrúpa de H a ghintear ag an mball f.

(v) Taispeáin go bhfuil an foghrúpa sin iseamorfach leis an ngrúpa $\{1, -1, i, -i\}$, $\times$ áit a bhfuil $i^2 = -1$ agus áit a chomharthaíonn $\times$ méadú.

11. **(*a*)** Lár d'éilips is ea (0,0) agus tá ceann amháin dá chuid fócais ag $(\sqrt{57}, 0)$. Tá fad 16 sa mhion-ais aige. Faigh cothromóid an éilips.

(*b*) Is pointe é $p(x, y)$ sa chaoi go bhfuil a fhad ón bpointe $(-ae, 0)$ ionann le e uair a fhaid ón líne $ex + a = 0$ áit a bhfuil $0 < e < 1$ agus $a \in \mathbf{R}$.

Taispeáin go sásaíonn p an chothromóid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1-e^2)} = 1.$$

(*c*) Is inmhapa cosúlachta é f. Is í an mhírlíne $[p'q']$ íomhá na mírlíne $[pq]$ faoi f.

Más M an déroinnteoir ingearach de $[pq]$, cruthaigh gurb é $f(M)$ an déroinnteoir ingearach de $[p'q']$.

Uaidh sin, cruthaigh go ndéantar imlár an triantáin pqr a mhapáil ar an imlár den triantán $p'q'r'$ faoi f.