**AN ROINN OIDEACHAIS AGUS EOLAÍOCHTA**

**SCRÚDÚ NA hARDTEISTIMÉIREACHTA, 1999**

# MATAMAITIC — ARDLEIBHÉAL
# PÁIPÉAR 2 (300 marks)

**DÉ hAOINE, 11 MEITHEAMH — MAIDIN, 9.30 go dtí 12.00**

Freagair **cúig** cheist as Roinn **A** agus ceist **amháin** as Roinn **B.**
Tá 50 marc ag dul do gach cheist.

**Is féidir go gcaillfí marcanna mura dtaispeántar obair riachtanach go soiléir nó mura gcuireann tú in iúl áit ar baineadh úsáid as áireamhán.**

## ROINN A

**1.** *(a)* Faigh an chothromóid chairtéiseach den chiorcal

$$x = 6 + \cos\theta, \quad y = 4 + \sin\theta,$$

áit a bhfuil $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

*(b)* Is é

$$x^2 + y^2 - 10kx + 6y + 60 = 0$$

an chothromóid de chiorcal, ar fad ga dó 7, áit $k > 0$.

**(i)** Faigh lár an chiorcail i dtéarmaí $k$.

**(ii)** Faigh an luach ar $k$.

**(iii)** Tá an líne $3x + 4y + d = 0$ ina tadhlaí don chiorcal, áit a bhfuil $d \in \mathbf{Z}$.

Taispeáin gur ionann le 17 luach amháin ar $d$.

Faigh an luach eile ar $d$.

*(c)* Trasnaíonn dhá chiorcal a chéile ag na pointí $a(1, 2)$ agus $b(7, -6)$. An déroinnteoir ingearach de [ $ab$ ] is ea an líne a cheanglaíonn láir an dá chiorcal.

Is é 10 an fad slí atá lár gach ciorcail ó lárphointe [ $ab$ ].

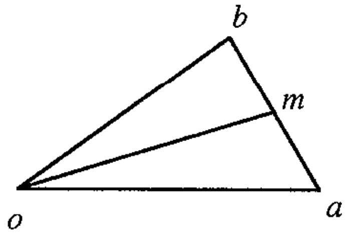
Faigh lárphointe [ $ab$ ] agus fad an gha de gach ciorcal acu.

Faigh an chothromóid de gach ciorcal acu.

**2.** (*a*) Tá $\vec{p} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{q} = 5\vec{i} - 6\vec{j}$ agus $\vec{p} = r\vec{q}$.

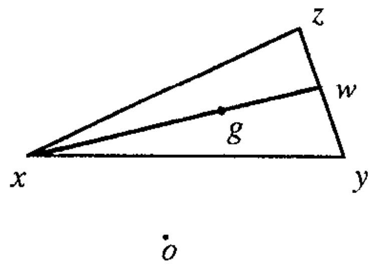
Réalaigh $\vec{r}$ i dtéarmaí $\vec{i}$ agus $\vec{j}$.

(*b*) **(i)** Is triantán é *oab*, arb é *o* an bunphointe.
Is é *m* lárphointe [ *ab* ].
Réalaigh $\vec{m}$ i dtéarmaí $\vec{a}$ agus $\vec{b}$.




**(ii)** Sa triantán *xyz*, tá *w* ina lárphointe de [ *yz* ], agus pointe is ea *g* in [ *xw* ] gur fíor ina leith $|xg| = \frac{2}{3}|xw|$ arb é *o* an bunphointe.

Réalaigh $\vec{g}$ i dtéarmaí $\vec{x}$, $\vec{y}$ agus $\vec{z}$




(*c*) **(i)** Taispeáin le haghaidh gach veicteoir $\vec{r}$ agus $\vec{s}$ go bhfuil $\vec{r}.\vec{s}^{\perp} = -\vec{r}^{\perp}.\vec{s}$.

**(ii)** Is pointí ar leith iad *a*, *b* agus *c*.

Má tá

$$\vec{ad} = t\left(\frac{\vec{ab}^{\perp}}{|\vec{ab}|} - \frac{\vec{ac}^{\perp}}{|\vec{ac}|}\right),$$

áit $t \in \mathbf{R}$ agus $t \neq 0$, taispeáin

$$|\angle bad| = |\angle cad|.$$

**3.** (*a*) Taispeáin go ngabhann an líne $6x - 8y - 71 = 0$ lárphointe [ *ab* ] áit arb $(8, -6)$ comhordanáidí *a* agus arb $(5, -2)$ comhordanáidí *b*.

(*b*) Is é $5x - 3y + 10 = 0$ cothromóid na líne *L*.
Is iad $(6, 2)$ comhordanáidí *k*.
Taispeáin gurb é $\sqrt{34}$ an fad ingearach ó *k* go dtí *L*.

Is é *f* an t-inmhapa $(x, y) \longrightarrow (x', y')$ áit a bhfuil

$$x' = 7x - 2y$$
$$y' = -4x + y.$$

Is í an líne $f(L)$ an íomhá de *L* faoi *f*. Faigh cothromóid $f(L)$.

Taispeáin gurb é $\frac{\sqrt{34}}{\sqrt{5}}$ an fad ingearach ó $f(k)$ go dtí $f(L)$.

(*c*) Is é $m \neq 0$ an fána atá ag líne a ghabhann an pointe $(-4, -2)$.

Trasnaíonn an líne seo an ais *x* ag $(x_1, 0)$ agus an ais *y* ag $(0, y_1)$.

Ag glacadh leis go bhfuil $x_1 + y_1 = 3$, faigh fánaí an dá líne a chomhlíonann an choinníoll seo.

Faigh tomhas na géaruillinne idir an dá líne sin agus bíodh do fhreagra ceart agat go dtí an chéim is gaire.

4. *(a)* Faigh an luach ar $k$ gur fíor ina leith

$$\text{sín } 75° - \text{sín } 15° = \frac{1}{\sqrt{k}}, \quad k \in \mathbf{N}_0.$$

Féach na Táblaí, leathanach 9.

*(b)* (i) Réalaigh $\text{sín}5x - \text{sín}x$ mar thoradh de shíneas agus chomhshíneas.

(ii) Faigh gach réiteach den chothromóid

$$\text{sín}5x - \text{sín}x = 0$$

sa bhfearann $0° \leq x \leq 180°$.

*(c)* Cruthaigh

$$\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}.$$

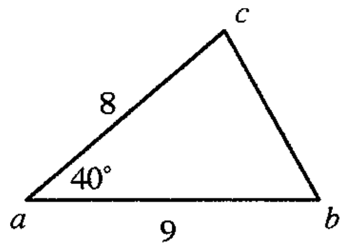
Faigh sa bhfoirm $p \pm \sqrt{q}$, $p \in \mathbf{Z}$, $q \in \mathbf{N}$,

(i) $\tan 75°$

(ii) $\tan 15°$.

5. *(a)* Sa triantán $abc$, $|ab| = 9$, $|ac| = 8$ agus $|\angle cab| = 40°$.

Faigh, ceart go dtí dhá ionad de dheachúlacha, achar an triantáin $abc$.

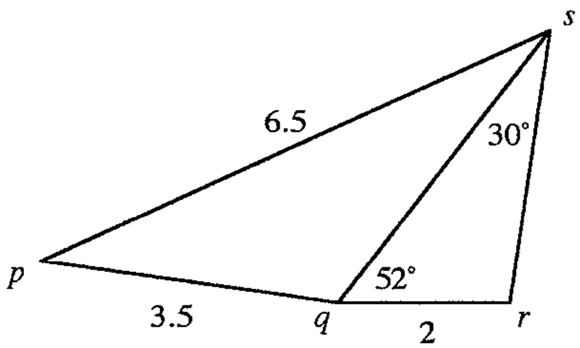



*(b)* Sna triantáin $pqs$ agus $qrs$, $|pq| = 3.5$, $|qr| = 2$, $|ps| = 6.5$, $|\angle qsr| = 30°$ agus tá $|\angle sqr| = 52°$.

Ríomh

(i) $|qs|$, ceart go dtí dhá ionad de dheachúlacha

(ii) $|\angle pqs|$, ceart go dtí an chéim is gaire.




*(c)* Réalaigh $\text{sín}(135° - A)$ i dtéarmaí $\text{sín}A$ agus $\cos A$.

Réalaigh $\text{sín}(135° - A)\cos(135° + A)$ sa bhfoirm $k(1 + \text{sín}pA)$, áit a bhfuil $k, p \in \mathbf{R}$.

Faigh na luachanna ar $A$ gur fíor ina leith

$$\text{sín}(135° - A)\cos(135° + A) = -\frac{3}{4}$$

áit go bhfuil $0° \leq A \leq 180°$.

6. *(a)* Cé mhéad slí is féidir grúpa de chúigear duine a roghnú as ceathrar ban agus ceathrar fear?

Ríomh an líon de na grúpaí sin ina bhfuil triúr ban agus gan níos mó ná triúr ban iontu.

*(b)* Réitigh an difearchothromóid

$$u_{n+2} - 2u_{n+1} - 6u_n = 0, \quad \text{áit a bhfuil } n \geq 0,$$

má thugtar duit go bhfuil $u_0 = 0$ agus $u_1 = 14$.

*(c)* I rang de 24 dalta tá 14 buachaill agus 10 cailín.

I seachtain ar leith (Luan go Domhnach, araon san áireamh) déanann triúr dalta a mbreithlaethanta a cheiliúradh. Glac leis nach dóichí breithlá ar lá ar bith sa tseachtain thar lá eile sa tseachtain agus go bhfuil na breithlaethanta neamhspleách ar a chéile.

Cad é an dóchúlacht

**(i)** gur triúr buachaill nó triúr cailín an triúr dalta sin

**(ii)** go dtiteann gach breithlá díobh ar laethanta éagsúla sa tseachtain nó go dtiteann siad ar an lá céanna sa tseachtain gan An Luan san áireamh?

7. *(a)* Déantar sé dhiosca atá ar aonmhéad a chruacadh, ceann amháin ar an gceann eile. Áirítear orthu dhá dhiosca dhearga atá comhionan lena chéile maille le ceithre cinn eile, ceann ar dhath gorm, ceann ar dhath buí, ceann ar dhath glas agus ceann ar dhath bán.

Cé mhéad slí éagsúil is féidir na sé dhiosca a chruacadh sa chaoi go mbeadh an dá dhiosca dhearga ag an mbarr nó ag an mbun?

*(b)* Baintear, ar fán, dhá liathróid go comhuaineach as bosca ina bhfuil trí liathróid dhubha, trí liathróid dhearga agus trí liathróid bhuí.

Faigh an dóchúlacht

**(i)** go bhfuil an dá liathróid buí

**(ii)** nach bhfuil ceachtar den dá liathróid buí

**(iii)** go bhfuil ceann amháin, ar a laghad, den dá liathróid buí.

*(c)* Is é $2b$ an meán agus is é $\sigma$ an diall caighdeánach de na huimhreacha $a$, $3a$, $b$, $2b$.

**(i)** Réalaigh $b$ i dtéarmaí $a$.

**(ii)** Réalaigh $\sigma$ i dtéarmaí $a$.

**(iii)** Faigh an raon luachanna ar $a$ gur fíor ina leith $\sigma^2 < 18.5$.

## ROINN B

**Freagair CEIST AMHÁIN as an roinn seo.**

---

8. (a) Bain feidhm as míriomlánú chun $\int xe^x dx$ a luacháil.

(b) Is í $f(x) = f(0) + \frac{f'(0)x}{1!} + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \frac{f'''(0)x^3}{3!} + \ldots$ an tsraith Maclaurin.

Déan an tsraith Maclaurin a asbheirt le haghaidh $f(x) = \cos x$ suas chomh fada leis an téarma ina bhfuil $x^6$ agus an téarma sin san áireamh chomh maith.

Uaidh sin scríobh síos an téarma ginearálta den tsraith Maclaurin le haghaidh $f(x) = \cos x$.

Bain feidhm as tástáil an chóimheasa chun a thaispeáint go bhfuil an tsraith inréimneach le haghaidh gach $x \in \mathbf{R}$.

(c) Dlúthshorcóir, ar gha $r$ agus ar airde $h$, tá a thoirt buan cothrom le $K$.

(i) Réalaigh $h$ i dtéarmaí $r$, $\pi$ agus $K$.

(ii) San uair ina bhfuil achar dromchla uile an tsorcóra ina íosluach, faigh an cóimheas $r : h$.

Bíodh do fhreagra mar chóimheas d'uimhreacha aiceanta.

9. (a) Caitear dísle neamhlaofa dhá uair. Ríomh an dóchúlacht go bhfaightear suim atá níos lú ná ceathair.

(b) Tá trí cinn de bhoinn óir agus dhá cheann de bhoinn airgid i mála A. Tá ceithre cinn de bhoinn óir agus cúig cinn de bhoinn airgid i mála B.

(i) Déantar bonn a thoghadh go fánach as gach mála agus a chasadh ar ais ansin sa mhála as a toghadh é.

Cad é an dóchúlacht gur ór é ceann amháin de na boinn a toghadh agus gur airgead é an ceann eile?

(ii) Toghtar bonn go fánach as mála A agus cuirtear sa mhála B é.

Ansin toghtar bonn go fánach as mála B agus cuirtear sa mhála A é.

Déantar an dá ghníomh sin a athdhéanamh san ord céanna.

Cad é an dóchúlacht go bhfuil cúig bhonn óir sa mhála A anois?

(c) Déantar bonn a chaitheamh 500 uair agus de thoradh sin faightear 270 aghaidh.

Ag an leibhéal suntasachta de 5%, a thástáil an bhfuil an bonn laofa ar son aghaidheanna.

**10.** *(a)* Bíodh $p*q = \dfrac{p+q}{1+pq}$ , $p, q \in \mathbf{R}$, $p,q \geq 0$.

Faigh an ball ionannais.

*(b)* Réalaíonn an tábla a leanas an grúpa $G, \circ$

| $\circ$ | $e$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $g$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $e$ | $e$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $g$ |
| $a$ | $a$ | $b$ | $e$ | $g$ | $c$ | $d$ |
| $b$ | $b$ | $e$ | $a$ | $d$ | $g$ | $c$ |
| $c$ | $c$ | $d$ | $g$ | $e$ | $a$ | $b$ |
| $d$ | $d$ | $g$ | $c$ | $b$ | $e$ | $a$ |
| $g$ | $g$ | $c$ | $d$ | $a$ | $b$ | $e$ |

**(i)** Scríobh síos na baill de $G$ ar ord a dó iad.

**(ii)** Faigh an tacar $C(b) = \{x \in G : x \circ b = b \circ x\}$.

*(c)* **(i)** Cruthaigh gur cioglach é grúpa ar bith ar ord príomha é.

**(ii)** Cruthaigh go roinntear an t-ord de $G$ ag ord de bhall ar bith de ghrúpa críochta $G$.

**11.** *(a)* Faigh cothromóid an éilips ar lár dó (0, 0), ar éalárnacht dó $\dfrac{1}{3}$ agus ar fócas amháin dó (3, 0).

*(b)* Is inmhapa fineach é $f$.

**(i)** Is é $m$ lárphointe na mírlíne [ $ab$ ].

Taispeáin gurb é $f(m)$ lárphointe [ $f(a)f(b)$ ].

**(ii)** Déanann $f$ an triantán $pqr$ a mhapáil ar an triantán $p'q'r'$.

Is é $g$ an meánlár den triantán $pqr$ agus is é $h$ an meánlár den triantán $p'q'r'$.

Taispeáin $f(g) = h$.

*(c)* Déantar an ciorcal $C : x^2 + y^2 = 1$ a mhapáil don éilips $E$ faoin inmhapa fineach $f$.

Déantar an ciorcal $C$ a imscríobh ag an chearnóg $abcd$, áit ar stuaiceanna urchomhaireacha iad $a$ agus $c$.

Cruthaigh go ndéantar an éilips $E$ a imscríobh ag an chomhthreomharán $f(a)f(b)f(c)f(d)$.