882

AN ROINN OIDEACHAIS AGUS EOLAÍOCHTA

SCRÚDÚ ARDTEISTIMÉIREACHTA, 1999

MATAMAITIC - ARDLEIBHÉAL - PÁIPÉAR I (300 marc)

DÉARDAOIN, 10 MEITHEAMH - MAIDIN 9.30 go dtí 12.00

SÉ CHEIST a fhreagairt (50 marc an ceann).

Is féidir go gcaillfí marcanna mura dtaispeántar obair riachtanach go soileir nó mura gcuireann tú in iúl cén áit ar baineadh úsáid as áireamhán.

---

1. **(a)** Taispeáin $\dfrac{-1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3}$.

(b) Réitigh le haghaidh x

$$\frac{4x-1}{x-3} < 2, \quad x \in \mathbf{R} \text{ agus } x \neq 3.$$

(c) Is fachtóir é $x^2 + bx + c$ de $x^3 - p$.

Taispeáin

(i) $b^3 = p$

(ii) $c^3 = p^2$.

2. **(a)** Réitigh na cothromóidí comhuaineacha

$$x + y = 1$$
$$x^2 + y^2 = 25.$$

(b) Má tá

$$u_n = 2^{2n-1} + 2^{n-1} ,$$

fíor le haghaidh gach slánuimhreach n,
taispeáin

$$u_{n+1} - 2u_n - 2^{2n} = 0.$$

(c) Ag glacadh le a, b, c mar réaduimhreacha deimhneacha neamhchothroma, bain feidhm as

$a^2 + b^2 > 2ab$, $b^2 + c^2 > 2bc$ agus $c^2 + a^2 > 2ac$, chun

(i) $a^2 - ab + b^2 > ab$ a asbheirt

(ii) $a^2 + b^2 + c^2 > bc + ca + ab$ a asbheirt

(iii) a thaispeáint go bhfuil $a^3 + b^3 > ab(a + b)$.

3. **(a)** Má tá $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$, faigh A^{-1}.

(b) **(i)** Faigh cothromóid chearnach ar fréamhacha iad $3 + i$ agus $3 - i$, áit a bhfuil $i^2 = -1$.

(ii) Bíodh $P(z) = z^3 - kz^2 + 22z - 20,\ k \in \mathbf{R}$.

Is fréamh í $3 + i$ den chothromóid $P(z) = 0$.
Faigh an luach ar k.
Faigh an dá fhréamh eile den chothromóid $P(z) = 0$.

(c) **(i)** Réitigh le haghaidh w

$$\sqrt{5}|w| + iw = 3 + i\ .$$

Scríobh do chuid fhreagraí sa bhfoirm $u + iv$, áit a bhfuil $u, v \in \mathbf{R}$.

(ii) Bain feidhm as teoirim De Moivre chun trí fhréamh den chothromóid

$$z^6 - 1 = 0$$

a fháil.

4. **(a)** Réitigh $\begin{pmatrix} n+4 \\ 2 \end{pmatrix} = 91$, le haghaidh $n \in \mathbf{N}$.

(b) **(i)** Is é $3n + 2$ an nú téarma de shraith chomhbhreise.
Faigh S_n, suim an chéad n téarma, i dtéarmaí n.

(ii) Luacháil, i dtéarmaí n, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$.

(c) Bíodh $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}x^n$, áit a bhfuil $|x| < 1$ agus $0 < q < 1$.

Taispeáin $f(x) = \dfrac{x}{1-qx}$.

Má tá $g(x) = \dfrac{1}{1-(1-q)f(x)}$, taispeáin $g(x) = \dfrac{1-qx}{1-x}$.

5. **(a)** Faigh comhéifeacht a^3 sa bhforbairt $(2 + a)^5$.

(b) **(i)** Réitigh an chothromóid

$$\sqrt{2x+7} = 2 + \sqrt{x} \ .$$

(ii) Má tá $x > 0$ agus $x \neq 1$, taispeáin

$$\frac{1}{\log_2 x} + \frac{1}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_5 x} = \frac{1}{\log_{30} x} \ .$$

Nóta: $\log_b a = \dfrac{\log_c a}{\log_c b}$.

(c) Bain feidhm as ionduchtú chun a chruthú go bhfuil $\sum_{r=1}^{n} r^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$.

6. **(a)** Difreáil i leith x

$$(3 - 4x)^5 .$$

(b) Faigh ó bhunphrionsabail díortach sín x i leith x.

(c) Bíodh $f(x) = xe^{-ax}$, $x \in \mathbf{R}$, a tairiseach agus $a > 0$.

Taispeáin go bhfuil uasluach logánta ag $f(x)$ agus réalaigh comhordanáidí an uasphointe logánta seo i dtéarmaí a.

Faigh, i dtéarmaí a, comhordanáidí an phointe arb ionann le nialas é an dara díorthach de $f(x)$ ag an bpointe sin.

7. **(a)** Faigh díorthaíoch $\sqrt{x^2+1}$.

(b) **(i)** Bíodh $x = t - \text{sín}\, t \cos t$ agus $y = 4\cos t$, $0 < t < \frac{\pi}{2}$.

Taispeáin $\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{\text{sín}\, t}$.

(ii) Faigh fána an tadhlaí don chuar

$$x^2 - y^2 - x = 1$$

ag an bpointe (2, 1).

(c) Bíodh $f(x) = x^3 + kx^2 - 4$, áit $x \in \mathbf{R}$ agus $k > 0$.

Taispeáin gurb iad (0, –4) agus $\left(\frac{-2k}{3}, \frac{4k^3 - 108}{27}\right)$, faoi seach, comhordanáidí an íosphointe logánta agus an uasphointe logánta de $f(x)$.

Faigh

(i) an raon luachanna ar k gur fíor ina leith trí fhréamh réadacha a bheith ag $f(x) = 0$

(ii) an luach ar k gur fíor ina leith trí fhréamh réadacha, agus dhá cheann díobh cothrom lena chéile, a bheith ag $f(x) = 0$.

8. **(a)** Faigh $\int \left(4x + 1 + \frac{1}{x^3}\right) dx$.

(b) Luacháil **(i)** $\int_0^{\pi/6} 2\cos 4\theta \cos 2\theta \, d\theta$ **(ii)** $\int_{-3}^{0} (x+3)e^{x(x+6)} dx$.

(c) Luacháil $\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{4 - x^2}\, dx$.

Nod: Bíodh $x = 2$ sín θ.