Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Estudios matemáticos
Nivel medio
Prueba 2

Viernes 5 de mayo de 2017 (mañana)

1 hora 30 minutos

Instrucciones para los alumnos

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Para esta prueba, se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de estudios matemáticos NM**.
- Conteste todas las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán darse como valores exactos o con una aproximación de tres cifras significativas.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[90 puntos]**.

2217 – 7410

International Baccalaureate
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

Conteste **todas** las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Empiece una página nueva para cada respuesta. Se recomienda que muestre todos los cálculos, siempre que sea posible. Cuando la respuesta sea incorrecta se otorgarán algunos puntos siempre que aparezca el método empleado y éste sea correcto. Para los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el proceso seguido hasta su obtención. Por ejemplo, cuando deba utilizar un gráfico de una calculadora de pantalla gráfica para hallar soluciones, deberá dibujar esas gráficas en su respuesta.

1. [Puntuación máxima: 16]

En un colegio, a todos los alumnos de Estudios Matemáticos NM se les tomó un examen. El examen constaba de cuatro preguntas y cada una correspondía a una unidad distinta del programa de estudios. La calidad de cada pregunta se calificaba de satisfactoria o de no satisfactoria. Cada alumno respondía solo tres de las cuatro preguntas, cada una en una hoja de respuesta distinta.

La siguiente tabla muestra, para cada pregunta, el número de respuestas satisfactorias y no satisfactorias que hubo.

		Unidad del programa de estudios				
		Cálculo	**Probabilidad**	**Geometría**	**Lógica**	**Total**
Calidad de la respuesta	**Satisfactoria**	10	16	20	14	60
	No satisfactoria	8	6	10	6	30
	Total	18	22	30	20	90

(a) Si profesor elige una respuesta al azar, halle la probabilidad de que

(i) sea una respuesta a la pregunta de Cálculo;

(ii) sea una respuesta satisfactoria a la pregunta de Cálculo;

(iii) sea una respuesta satisfactoria, sabiendo que es una respuesta correspondiente a la pregunta de Cálculo. [6]

(b) El profesor agrupa las respuestas por unidad, y elige dos respuestas a la pregunta de Lógica. Halle la probabilidad de que las dos respuestas hayan sido no satisfactorias. [3]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 1: continuación)

Con los datos que se muestran en la tabla se realizó una prueba de χ^2 a un nivel de significación del 5%.

(c) Indique la hipótesis nula para esta prueba. [1]

(d) Muestre que la frecuencia esperada de respuestas satisfactorias a la pregunta de Cálculo es igual a 12. [1]

(e) Escriba el número de grados de libertad de esta prueba. [1]

(f) Utilice la calculadora de pantalla gráfica para hallar el estadístico χ^2 para estos datos. [2]

Para esta prueba, el valor crítico es $7{,}815$.

(g) Indique la conclusión de esta prueba de χ^2. Dé una razón que justifique su respuesta. [2]

2. [Puntuación máxima: 11]

Considere estas tres proposiciones, donde x es un número natural.

p: x es divisor de 60
q: x es múltiplo de 4
r: x es múltiplo de 5

(a) Escriba, en forma simbólica, la proposición compuesta

«Si x es divisor de 60 entonces x es múltiplo de 5 o x no es múltiplo de 4.» [3]

(b) Escriba con palabras la proposición compuesta $\neg r \wedge (p \veebar q)$. [3]

(c) **Copie** la siguiente tabla de verdad y complete las tres últimas columnas [3]

p	q	r	$\neg r$	$p \veebar q$	$\neg r \wedge (p \veebar q)$
V	V	V			
V	V	F			
V	F	V			
V	F	F			V
F	V	V			
F	V	F			
F	F	V			
F	F	F			

(d) Indique por qué la proposición compuesta $\neg r \wedge (p \veebar q)$ no es una contradicción lógica. [1]

(e) A continuación se muestra una de las filas de la tabla de verdad del apartado (c).

p	q	r	$\neg r$	$p \veebar q$	$\neg r \wedge (p \veebar q)$
V	F	F			V

Escriba **un** valor de x que satisfaga estos valores de verdad. [1]

3. [Puntuación máxima: 18]

El director de una fábrica de carpetas, fue anotando durante seis meses consecutivos el número de carpetas producidas en la fábrica ese mes (en miles) y los costes de producción (en miles de euros).

	Enero	**Febrero**	**Marzo**	**Abril**	**Mayo**	**Junio**
Carpetas producidas, x **(miles)**	10	15	22	30	28	21
Costes de producción, C **(miles de euros)**	35	40	60	72	68	55

(a) Con estos datos, dibuje con precisión un diagrama de dispersión. Utilice la siguiente escala: en el eje horizontal, 2 cm para representar 5000 carpetas y en el eje vertical, 2 cm para representar $10\,000$ euros. [4]

(b) Escriba, para este conjunto de datos

(i) la media del número de carpetas producidas, $\bar{x}$;

(ii) la media de los costes de producción, $\bar{C}$. [2]

(c) Rotule el punto $\mathrm{M}\left(\bar{x}, \bar{C}\right)$ en el diagrama de dispersión. [1]

(d) Utilice la calculadora de pantalla gráfica para hallar el coeficiente de correlación momento–producto de Pearson, r . [2]

(e) Indique un motivo que explique por qué la recta de regresión de C sobre x resulta apropiada para modelizar la relación que existe entre estas variables. [1]

(f) Utilice la calculadora de pantalla gráfica para hallar la ecuación de la recta de regresión de C sobre x. [2]

(g) Dibuje con precisión la recta de regresión de C sobre x en el diagrama de dispersión. [2]

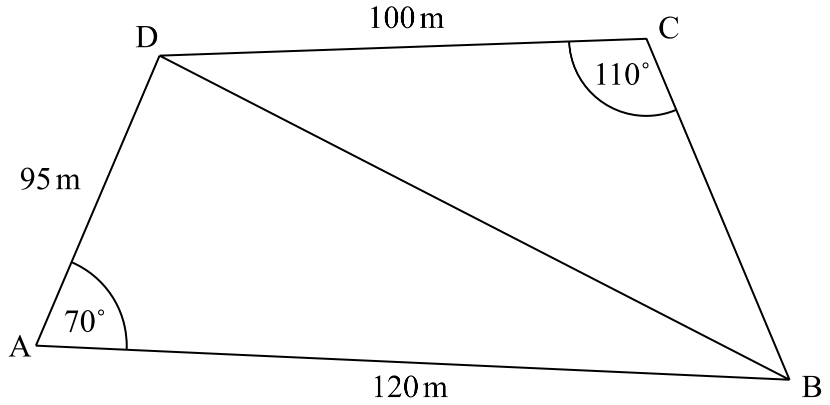
Cada mes, la fábrica vende todas las carpetas que ha producido ese mes. Cada carpeta se vende por $2{,}99$ euros.

(h) Utilice la ecuación de la recta de regresión para estimar el número mínimo de carpetas que tiene que vender la fábrica en un mes para superar los costes de producción de ese mes. [4]

4. [Puntuación máxima: 15]

El cuadrilátero ABCD representa un parque, donde $\mathrm{AB} = 120\,\mathrm{m}$, $\mathrm{AD} = 95\,\mathrm{m}$ y $\mathrm{DC} = 100\,\mathrm{m}$. El ángulo DAB mide 70° y el ángulo DCB mide 110°. Toda esta información se muestra en la siguiente figura.

la figura no está dibujada a escala



Hay un camino recto que atraviesa el parque y que une los puntos B y D.

(a) Halle la longitud del camino BD. [3]

(b) Muestre que el ángulo DBC mide $48{,}7^\circ$, redondeando a tres cifras significativas. [3]

(c) Halle el área del parque. [4]

Se va a construir un camino nuevo, CE, de modo tal que E sea el punto de BD que está más próximo a C.

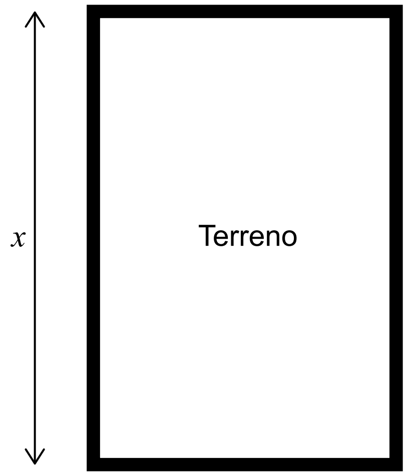
(d) Halle la longitud del camino CE. [2]

La zona del parque representada por el triángulo DCE se va a utilizar para una carrera solidaria. Para ello, se va a marcar un recorrido que vaya por los lados de esta zona.

(e) Calcule la longitud total de dicho recorrido. [3]

5. [Puntuación máxima: 14]

Violeta tiene previsto cultivar flores en un terreno rectangular. Coloca una valla para marcar el perímetro del terreno y, para ello, utiliza 200 metros de valla. El terreno mide x metros de largo.



(a) Muestre que la anchura del terreno, en metros, viene dada por $100 - x$. [1]

(b) Escriba el área del terreno en función de x. [1]

Violeta coloca la valla de modo tal que se maximice el área del terreno.

(c) Halle el valor de x que maximiza el área del terreno. [2]

Por la venta de las flores, Violeta gana 2 leva búlgaros (BGN) por cada metro cuadrado de terreno.

(d) Muestre que Violeta gana 5000 BGN de la venta de las flores que ha cultivado en ese terreno. [2]

Violeta quiere invertir sus 5000 BGN.

(e) Un banco le ofrece un tipo de interés nominal anual del 4%, compuesto **semestralmente**.

(i) Halle la cantidad de dinero que tendría Violeta al cabo de 6 años. Dé la respuesta redondeando a dos lugares decimales.

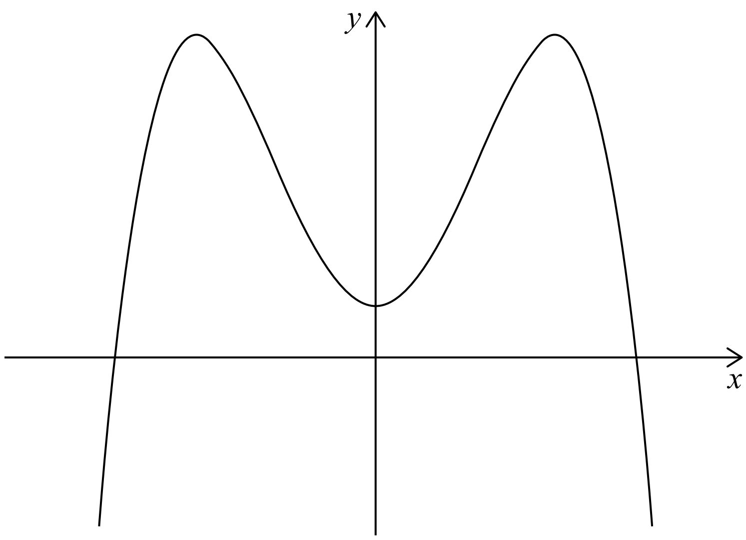
(ii) Halle cuánto tiempo tendría que pasar para que los intereses recibidos fueran 2000 BGN. [6]

Hay otro banco que le ofrece un tipo de interés del $r\,\%$ compuesto **anualmente**, lo que le permitiría duplicar su dinero en 12 años.

(f) Halle el menor valor posible de r. [2]

6. [Puntuación máxima: 16]

Considere la función $f(x) = -x^4 + ax^2 + 5$, donde a es una constante. A continuación se muestra una parte del gráfico de $y = f(x)$.



(a) Escriba el punto de corte del gráfico con el eje y. [1]

(b) Halle $f'(x)$. [2]

Se sabe que en el punto en el que $x = 2$ la tangente al gráfico de $y = f(x)$ es horizontal.

(c) (i) Muestre que $a = 8$.

(ii) Halle $f(2)$. [4]

En el gráfico de $y = f(x)$ hay otros dos puntos en los que la tangente es horizontal.

(d) Escriba

(i) la coordenada x de esos dos puntos;

(ii) los intervalos en los que la pendiente del gráfico de $y = f(x)$ es positiva. [4]

(e) Escriba el recorrido de $f(x)$. [2]

(f) Escriba el número de posibles soluciones que tiene la ecuación $f(x) = 5$. [1]

(g) La ecuación $f(x) = m$, donde $m \in \mathbb{R}$, tiene cuatro soluciones. Halle los posibles valores de m. [2]