



ESTUDIOS MATEMÁTICOS
NIVEL MEDIO
PRUEBA 2

Viernes 5 de noviembre de 2010 (mañana)

1 hora 30 minutos

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste todas las preguntas.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.

Empiece una página nueva para cada respuesta. Se recomienda que muestre todos los cálculos, siempre que sea posible. Cuando la respuesta sea incorrecta se otorgarán algunos puntos siempre que aparezca el método empleado y éste sea correcto. Para los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el proceso seguido hasta su obtención. Por ejemplo, cuando deba utilizar gráficas de una calculadora de pantalla gráfica para hallar soluciones, deberá dibujar esas gráficas en su respuesta.

1. [Puntuación máxima: 24]

Apartado A

Se hace una encuesta a 100 alumnos, y se les pregunta qué desayunaron esa mañana. Había tres opciones: cereales (X), pan (Y) y fruta (Z). Se obtuvieron los siguientes resultados

- 10 alumnos desayunaron las tres opciones
- 17 alumnos desayunaron únicamente pan y fruta
- 15 alumnos desayunaron únicamente cereales y fruta
- 12 alumnos desayunaron únicamente cereales y pan
- 13 alumnos desayunaron únicamente pan
- 8 alumnos desayunaron únicamente cereales
- 9 alumnos desayunaron únicamente fruta

- (a) Represente esta información en un diagrama de Venn. [4 puntos]
- (b) Halle el número de alumnos que no desayunaron ninguna de las tres opciones. [2 puntos]
- (c) Escriba el porcentaje de alumnos que desayunaron fruta. [2 puntos]
- (d) Describa con palabras qué desayunaron los alumnos pertenecientes al conjunto $X \cap Y'$. [2 puntos]
- (e) Halle la probabilidad de que un alumno dado haya desayunado **al menos** dos de las tres opciones mencionadas. [2 puntos]
- (f) Se escogen dos alumnos al azar. Halle la probabilidad de que ambos alumnos hayan desayunado las tres opciones mencionadas. [3 puntos]

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 1: continuación)

Apartado B

A esos mismos 100 alumnos se les pregunta también cuántas comidas, en promedio, tienen al día. Los datos recabados se han organizado en la siguiente tabla.

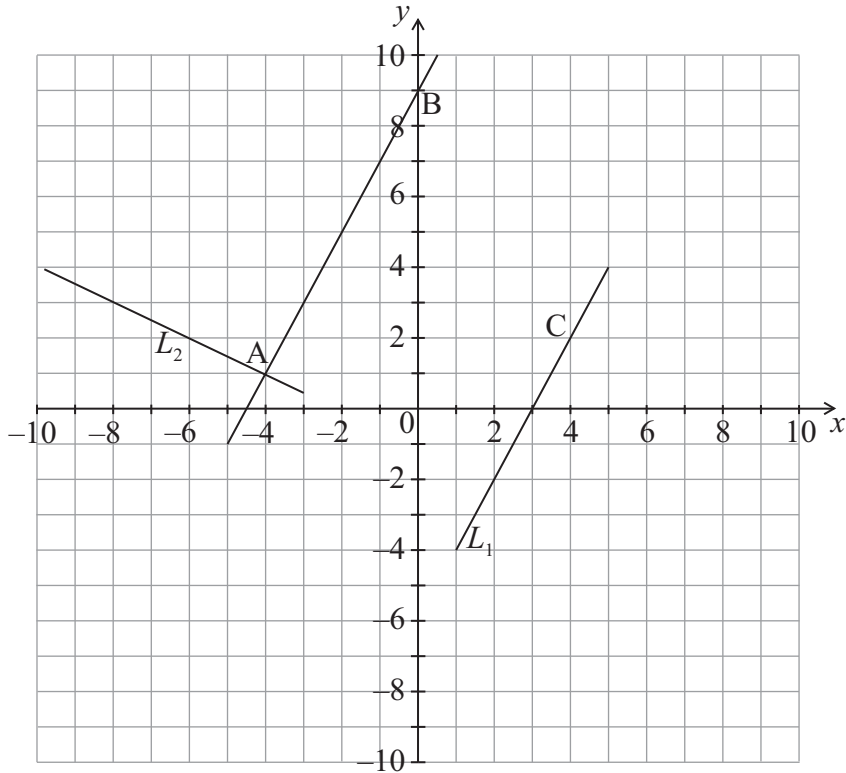
	3 comidas al día o menos	4 ó 5 comidas al día	Más de 5 comidas al día	Total
Hombres	15	25	15	55
Mujeres	12	20	13	45
Total	27	45	28	100

Se lleva a cabo una prueba de χ^2 a un nivel de significación del 5 % .

- (a) Escriba para esta prueba la hipótesis nula, H_0 . [1 punto]
- (b) Escriba el número de grados de libertad de esta prueba. [1 punto]
- (c) Escriba el valor crítico de esta prueba. [1 punto]
- (d) Compruebe que el número esperado de mujeres que hacen más de 5 comidas al día es igual a 13 (redondeando al número entero más próximo). [2 puntos]
- (e) Utilice su calculadora de pantalla gráfica para hallar, para estos datos, el valor de χ^2_{calc} . [2 puntos]
- (f) Decida si se debe o no aceptar H_0 . Justifique su respuesta. [2 puntos]

2. [Puntuación máxima: 13]

Los puntos $A(-4, 1)$, $B(0, 9)$ y $C(4, 2)$ están representados en el siguiente diagrama. El diagrama también muestra las rectas AB , L_1 y L_2 .



(a) Halle la pendiente de AB . [2 puntos]

L_1 pasa por C y es paralela a AB .

(b) Escriba cuál es el punto de corte de L_1 con el eje y . [1 punto]

L_2 pasa por A y es perpendicular a AB .

(c) Escriba la ecuación de L_2 . Dé la respuesta en la forma $ax + by + d = 0$ donde a, b y $d \in \mathbb{Z}$. [3 puntos]

(d) Escriba las coordenadas de D , el punto donde se cortan L_1 y L_2 . [1 punto]

R es un punto perteneciente a L_1 , de forma tal que $ABRD$ es un rectángulo.

(e) Escriba las coordenadas de R . [2 puntos]

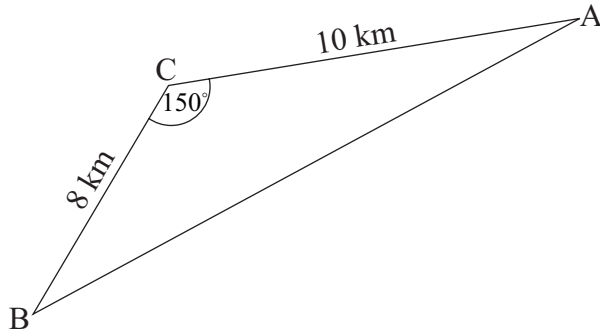
La distancia entre A y D es igual a $\sqrt{45}$.

(f) (i) Halle la distancia que hay entre D y R .

(ii) Halle el área del triángulo BDR . [4 puntos]

3. [Puntuación máxima: 16]

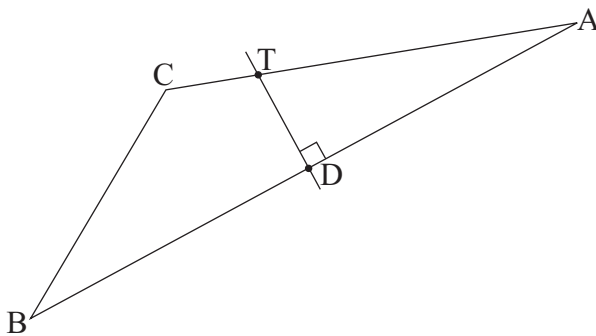
En la figura que se muestra a continuación, A, B y C representan tres pueblos, y los segmentos de recta AB, BC y CA representan las carreteras que los unen. Las longitudes de AC y CB son 10 km y 8 km respectivamente, y el ángulo que forman es igual a 150° .



la figura no está dibujada a escala

- (a) Halle la longitud de la carretera AB. [3 puntos]
- (b) Halle el valor del ángulo CAB. [3 puntos]

El pueblo D está a medio camino entre A y B. Se construye una carretera nueva, que es perpendicular a AB y pasa por D. Sea T el punto donde esta carretera corta a AC. Esta información se muestra en el diagrama que aparece a continuación.



la figura no está dibujada a escala

- (c) Escriba la distancia que hay entre A y D. [1 punto]
- (d) Compruebe que la distancia entre D y T es igual a 2,06 km (redondeando a tres cifras significativas). [2 puntos]

Un autobús comienza y termina su viaje en A, haciendo la ruta AD a DT y volviendo por TA.

- (e) Halle la distancia total recorrida en este viaje. [3 puntos]

La velocidad media del autobús en carretera mientras está en movimiento es de 70 km h^{-1} . El autobús hace una parada de 5 minutos tanto en D como en T.

- (f) Estime cuánto tiempo tarda el autobús en completar el viaje. Dé la respuesta redondeando al número de minutos más cercano. [4 puntos]

4. [Puntuación máxima: 16]

En esta pregunta, dé todas las respuestas redondeando a dos cifras decimales.

Apartado A

Estela vive en Brasil y quiere cambiar 4000 BRL (reales brasileños) a GBP (libras esterlinas británicas). El tipo de cambio es $1,00 \text{ BRL} = 0,3071 \text{ GBP}$. El banco cobra un 3 % de comisión sobre la cantidad de BRL.

(a) Halle, en **BRL**, cuánto dinero tiene Estela después de pagar la comisión. [2 puntos]

(b) Halle, en GBP, cuánto dinero recibe Estela. [2 puntos]

Tras su viaje al Reino Unido, a Estela le han sobrado 400 GBP. En el aeropuerto vuelve a cambiar este dinero a BRL. El tipo de cambio es ahora $1,00 \text{ BRL} = 0,3125 \text{ GBP}$.

(c) Halle, en BRL, cuánto dinero debería recibir Estela. [2 puntos]

En realidad, y después de pagar una comisión, Estela acaba recibiendo 1216,80 BRL.

(d) Halle, en BRL, qué comisión se le ha cobrado a Estela. [1 punto]

(e) El porcentaje de comisión es el t %. Halle el valor de t . [2 puntos]

Apartado B

Daniel invierte \$1000 (dólares estadounidenses) en una cuenta que ofrece un tipo de interés nominal anual del 3,5 %, **compuesto semestralmente**.

(a) Compruebe que después de tres años, Daniel tendrá en su cuenta \$1109,70 (redondeando a dos cifras decimales). [3 puntos]

(b) Escriba el interés que recibe Daniel una vez transcurridos estos tres años. [1 punto]

Helen invierte \$1000 en una cuenta que ofrece un interés **simple anual**.

(c) Halle el tipo de interés simple anual necesario para que Helen tenga en su cuenta \$1109,70 después de tres años. [3 puntos]

5. [Puntuación máxima: 21]

Considere la función $f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x + 30$.

(a) Escriba $f(0)$. [1 punto]

(b) Halle $f'(x)$. [3 puntos]

(c) Halle la pendiente de la gráfica de $f(x)$ en el punto donde $x = 1$. [2 puntos]

La gráfica de $f(x)$ tiene un máximo local, M, y un mínimo local, N.

(d) (i) Utilice $f'(x)$ para hallar la abscisa (coordenada x) de M y de N.

(ii) A partir de lo anterior, o de cualquier otro modo, escriba las coordenadas de M y de N. [5 puntos]

(e) Dibuje aproximadamente la gráfica de $f(x)$ para $-5 \leq x \leq 7$ y $-60 \leq y \leq 60$. Indique claramente en la gráfica a M y a N. [4 puntos]

Las rectas L_1 y L_2 son paralelas, y además son tangentes a la gráfica de $f(x)$ en los puntos A y B respectivamente. L_1 tiene por ecuación $y = 21x + 111$.

(f) (i) Halle la abscisa (coordenada x) de A y de B.

(ii) Halle la ordenada (coordenada y) de B. [6 puntos]