N08/5/MATSD/SP2/SPA/TZ0/XX+

88087410

International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

ESTUDIOS MATEMÁTICOS
NIVEL MEDIO
PRUEBA 2

Lunes 10 de noviembre de 2008 (mañana)

1 hora 30 minutos

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste todas las preguntas.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o con tres cifras significativas.

Empiece una página nueva para cada respuesta. Se recomienda que muestre todos los cálculos, siempre que sea posible. Cuando la respuesta sea incorrecta se otorgarán algunos puntos siempre que aparezca el método empleado y éste sea correcto. Para los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el proceso seguido hasta su obtención. Por ejemplo, cuando deba utilizar gráficas de una calculadora de pantalla gráfica para hallar soluciones, deberá dibujar esas gráficas en su respuesta.

1. *[Puntuación máxima: 17]*

A lo largo de toda esta pregunta hay que dar *todas* las respuestas redondeando al número entero más cercano.

El Colegio Parque empezó a dar clases en enero de 2000, con 100 alumnos. Cada año completo, el número de alumnos aumenta un 6 %.

(a) Halle el número de alumnos que tiene el Colegio Parque en

(i) enero de 2001;

(ii) enero de 2003. *[4 puntos]*

(b) Compruebe que en enero de 2007 el número de alumnos que tiene el Colegio Parque es igual a 150. *[2 puntos]*

El Colegio Arboleda tenía 110 alumnos en enero de 2000. Cada año completo, el número de alumnos aumenta en 10 respecto al año anterior.

(c) Halle el número de alumnos que tiene el Colegio Arboleda en enero de 2003. *[2 puntos]*

(d) Halle cuál será el primer año en el que el número de alumnos del Colegio Arboleda será un 60 % **más que** en enero de 2000. *[4 puntos]*

Cada mes de enero, a uno de los dos colegios, aquel que tiene más alumnos, se le concede un dinero extra para que lo gaste en equipamiento deportivo.

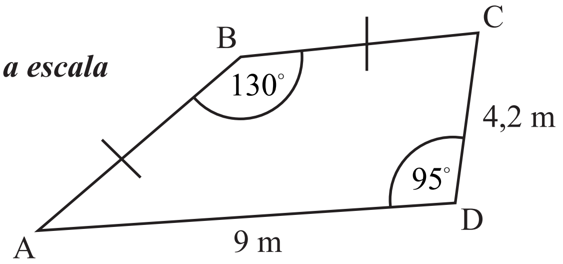
(e) (i) Decida qué colegio recibe este dinero en 2007. Justifique su respuesta.

(ii) Halle en qué año recibirá el Colegio Parque por primera vez este dinero extra. *[5 puntos]*

2. *[Puntuación máxima: 14]*

El cuadrilátero ABCD que se muestra a continuación representa un arenero. AB y BC tienen la misma longitud. AD tiene una longitud de 9 m y CD tiene una longitud de 4,2 m. Los ángulos ADC y ABC miden 95° y 130° respectivamente.

la figura no está dibujada a escala



(a) Halle la longitud de AC. *[3 puntos]*

(b) (i) Escriba el valor del ángulo BCA.

(ii) Calcule la longitud de AB. *[4 puntos]*

(c) Compruebe que el área del arenero es igual a 31,1 m^2 redondeando a 3 cifras significativas. *[4 puntos]*

El arenero tiene forma de prisma. Sus aristas tienen una altura de 40 cm. La arena ocupa un tercio del volumen del arenero.

(d) Calcule el volumen de arena que hay en el arenero. *[3 puntos]*

3. *[Puntuación máxima: 18]*

Jorge ha realizado una encuesta entre 200 conductores. Les ha hecho dos preguntas:

¿Hace cuanto tiempo que tiene permiso de conducir?
¿Se pone el cinturón de seguridad cuando conduce?

Las respuestas aparecen resumidas en la siguiente tabla.

	Se pone el cinturón	**No se pone el cinturón**
Permiso desde hace menos de 2 años	38	42
Permiso desde hace entre 2 y 15 años	30	45
Permiso desde hace más de 15 años	30	15

(a) Jorge realiza una prueba de χ^2 a un nivel de significación del 5 % para investigar si el uso del cinturón de seguridad está asociado con el tiempo que hace que el conductor tiene permiso de conducir.

(i) Escriba la hipótesis nula, H_0.

(ii) Escriba el número de grados de libertad.

(iii) Compruebe que el número esperado de conductores que se ponen el cinturón de seguridad y que tienen permiso de conducir desde hace más de 15 años es igual a 22 redondeando al número entero más cercano.

(iv) Escriba para estos datos el estadístico χ^2.

(v) ¿Acepta Jorge la H_0? Justifique su respuesta. *[8 puntos]*

(b) Considere los 200 conductores que participaron en la encuesta. Se escoge un conductor al azar. Halle la probabilidad de que

(i) este conductor se ponga el cinturón;

(ii) el conductor no se ponga el cinturón, **sabiendo que** el conductor tiene permiso de conducir desde hace más de 15 años. *[4 puntos]*

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 3: continuación)

(c) Se escogen dos conductores al azar. Halle la probabilidad de que

(i) ambos se pongan el cinturón;

(ii) al menos uno se ponga el cinturón. *[6 puntos]*

4. *[Puntuación máxima: 18]*

La temperatura en $^{\circ}$C de una cazuela con agua tras retirarla del fuego viene dada por $T(m) = 20 + 70 \times 2,72^{-0,4m}$, donde m es el número de minutos transcurridos desde que se retira la cazuela del fuego.

(a) Compruebe que la temperatura del agua cuando se retira del fuego es igual a 90 $^{\circ}$C. *[2 puntos]*

La siguiente tabla muestra valores de m y de $T(m)$.

m	1	2	4	6	8	10
$T(m)$	66,9	51,4	34,1	26,3	22,8	s

(b) (i) Escriba el valor de s.

(ii) Dibuje con precisión la gráfica de $T(m)$ para $0 \le m \le 10$. Utilice una escala de 1 cm para representar 1 minuto en el eje horizontal, y una escala de 1 cm para representar 10 $^{\circ}$C en el eje vertical.

(iii) **Utilice su gráfica** para hallar cuánto tiempo tarda la temperatura en alcanzar un valor de 56 $^{\circ}$C. Muestre claramente en qué consiste su método.

(iv) Escriba la temperatura que alcanza el agua cuando ha pasado mucho tiempo. Justifique su respuesta. *[9 puntos]*

Considere la función $S(m) = 20m - 40$ para $2 \le m \le 6$.

La función $S(m)$ representa la temperatura de la sopa que hay en una cazuela que se ha puesto al fuego dos minutos después de haberla quitado del agua. A continuación, se empieza a calentar la sopa.

(c) Dibuje con precisión la gráfica de $S(m)$ en los mismos ejes de coordenadas utilizados en el apartado (b). *[2 puntos]*

(d) Haga un comentario acerca del significado de la constante **20** en la fórmula de $S(m)$ en relación con la temperatura de la sopa. *[1 punto]*

(e) (i) **Utilice su gráfica** para resolver la ecuación $S(m) = T(m)$. Muestre claramente en qué consiste su método.

(ii) A partir de lo anterior, describa por medio de desigualdades el conjunto de valores de m para los cuales $S(m) > T(m)$. *[4 puntos]*

5. *[Puntuación máxima: 23]*

Considere la curva $y = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 6x - 2$.

(a) (i) Escriba el valor de y cuando x es 2.

(ii) Escriba las coordenadas del punto donde la curva corta al eje y. *[3 puntos]*

(b) Dibuje aproximadamente la curva para $-4 \leq x \leq 3$ y $-10 \leq y \leq 10$. Indique claramente la información obtenida en el apartado (a). *[4 puntos]*

(c) Halle $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. *[3 puntos]*

(d) Sea L_1 la tangente a la curva en el punto para el cual $x = 2$.
Sea L_2 una tangente a la curva, paralela a L_1.

(i) Compruebe que la pendiente de L_1 es igual a 12.

(ii) Halle la coordenada x del punto en el cual L_2 y la curva se cortan.

(iii) En el diagrama que hizo en el apartado (b), dibuje aproximadamente L_1 y L_2 y rotule ambas rectas. *[8 puntos]*

(e) Se sabe que $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} > 0$ para $x < -2$ y $x > b$ donde b es positivo.

(i) Utilizando la calculadora de pantalla gráfica o cualquier otro método alternativo, halle el valor de b.

(ii) Describa el comportamiento de la curva en el intervalo $-2 < x < b$.

(iii) Escriba la ecuación de la tangente a la curva en $x = -2$. *[5 puntos]*