IB DIPLOMA PROGRAMME
PROGRAMME DU DIPLÔME DU BI
PROGRAMA DEL DIPLOMA DEL BI

M07/5/MATHL/HP2/SPA/TZ0/XX

22077214

MATEMÁTICAS
NIVEL SUPERIOR
PRUEBA 2

Martes 8 de mayo de 2007 (mañana)

2 horas

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste todas las preguntas.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.

2207-7214

Por favor comience cada pregunta en una página nueva. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. En particular, junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza una gráfica para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente la misma como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. *[Puntuación máxima: 27]*

Considere los vectores $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$ y $\boldsymbol{c} = 2\boldsymbol{i} - 5\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$.

(a) Sabiendo que $\boldsymbol{c} = m\boldsymbol{a} + n\boldsymbol{b}$, donde m, $n \in \mathbb{Z}$, halle el valor de m y de n. *[5 puntos]*

(b) Halle un vector unitario $\boldsymbol{u}$ que sea normal a $\boldsymbol{a}$ y también a $\boldsymbol{b}$. *[5 puntos]*

(c) El plano π_1 contiene al punto $\mathrm{A}(1, -1, 1)$ y es normal al plano $\boldsymbol{b}$. El plano corta a los ejes x, y y z en los puntos L, M y N respectivamente.

(i) Halle la ecuación cartesiana de π_1.

(ii) Escriba las coordenadas de L, M y N. *[5 puntos]*

(d) La recta normal a π_1 y que pasa por el origen O corta a π_1 en el punto P.

(i) Halle las coordenadas de P.

(ii) **A partir de lo anterior** halle la distancia a π_1 desde el origen. *[7 puntos]*

(e) El plano π_2 tiene por ecuación $x + 2y + 4z = 4$. Calcule el ángulo que hay entre π_2 y una recta paralela a $\boldsymbol{a}$. *[5 puntos]*

2. *[Puntuación total: 21]*

Parte A *[Puntuación máxima: 11]*

El tiempo que tardan los autobuses en hacer el recorrido entre dos ciudades dadas sigue una distribución normal, de media igual a 35 minutos y desviación típica igual a 7 minutos.

(a) Halle la probabilidad de que un autobús elegido al azar tarde menos de 40 minutos en hacer el viaje. *[2 puntos]*

(b) El 90 % de los autobuses tardan menos de t minutos en hacer el viaje. Halle el valor de t. *[5 puntos]*

(c) Para una muestra aleatoria de 10 autobuses se registra la duración del viaje entre las dos ciudades. Halle la probabilidad de que exactamente 6 de estos autobuses tarden menos de 40 minutos en hacer el viaje. *[4 puntos]*

Parte B *[Puntuación máxima: 10]*

El número de accidentes de autobús que hay durante un intervalo de tiempo dado sigue una distribución de Poisson, siendo la media igual a 0,6 accidentes por día.

(a) Halle la probabilidad de que, en un día cualquiera elegido al azar, haya al menos dos accidentes. *[4 puntos]*

(b) Halle el número más probable de accidentes que hay en un día cualquiera elegido al azar. Justifique su respuesta. *[3 puntos]*

(c) Halle la probabilidad de que no haya ningún accidente en toda una semana (de siete días) elegida al azar. *[3 puntos]*

3. *[Puntuación máxima: 22]*

Sea $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 4 & 3\end{pmatrix}$.

(a) Halle el conjunto de valores de λ para los cuales la matriz $(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})$ es singular. *[5 puntos]*

Sea $\boldsymbol{A}^2+m\boldsymbol{A}+n\boldsymbol{I}=\boldsymbol{O}$ donde $m,\ n\in\mathbb{Z}$ y $\boldsymbol{O}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

(b) (i) Halle el valor de m y el de n.

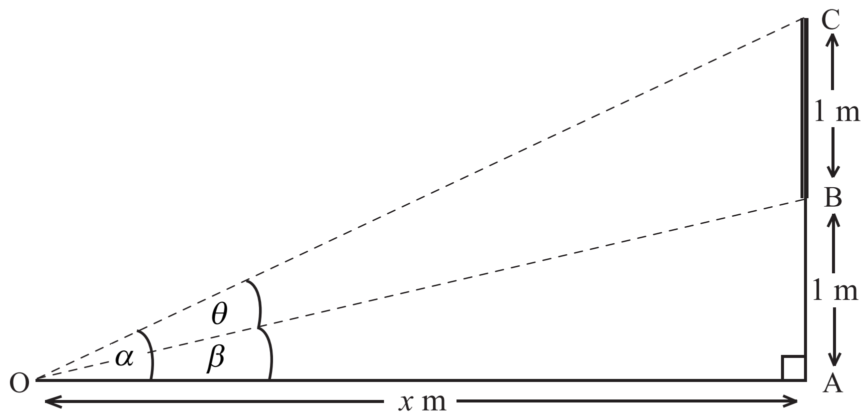
(ii) A partir de lo anterior, compruebe que $\boldsymbol{I}=\frac{1}{5}\boldsymbol{A}(6\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})$.

(iii) Use el resultado del **apartado (b)(ii)** para explicar por qué $\boldsymbol{A}$ es no singular. *[12 puntos]*

(c) Utilice los valores del **apartado (b)(i)** para expresar $\boldsymbol{A}^4$ en la forma $p\boldsymbol{A}+q\boldsymbol{I}$ donde $p,\ q\in\mathbb{Z}$. *[5 puntos]*

4. *[Puntuación máxima: 22]*

Se coloca en una pared una pantalla de televisión BC de un metro de altura. La parte inferior de la pantalla de televisión, B, está situada un metro por encima de la altura de los ojos de un observador. Los ángulos de elevación ($\text{A}\hat{\text{O}}\text{C}$, $\text{A}\hat{\text{O}}\text{B}$) desde la altura de los ojos del observador, O, hasta la parte superior e inferior de la pantalla de televisión son α y β radianes respectivamente. La distancia en horizontal desde el ojo del observador hasta la pared donde se ha colgado la pantalla de televisión es igual a x metros. El ángulo de visión del observador ($\text{B}\hat{\text{O}}\text{C}$) es θ radianes, tal como se muestra a continuación.



(a) (i) Compruebe que $\theta = \text{arctg}\,\dfrac{2}{x} - \text{arctg}\,\dfrac{1}{x}$.

(ii) A partir de lo anterior, o de cualquier otro modo, halle el valor **exacto** de x para el cual θ es máximo, y justifique por qué esa x da un máximo de θ.

(iii) Halle el valor máximo de θ. *[17 puntos]*

(b) Halle dónde se debería situar el observador para que el ángulo de visión sea igual a 15°. *[5 puntos]*

5. *[Puntuación máxima: 28]*

Sea $u = 1 + \sqrt{3}\mathrm{i}$ y $v = 1 + \mathrm{i}$, donde $\mathrm{i}^2 = -1$.

(a) (i) Compruebe que $\dfrac{u}{v} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\mathrm{i}$.

(ii) Expresando tanto u como v en forma módulo-argumental, compruebe que $\dfrac{u}{v} = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{12} + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\dfrac{\pi}{12}\right)$.

(iii) **A partir de lo anterior**, halle el valor **exacto** de $\mathrm{tg}\dfrac{\pi}{12}$, expresando la respuesta en la forma $a + b\sqrt{3}$, donde $a, b \in \mathbb{Z}$. *[15 puntos]*

(b) Utilice la inducción matemática para demostrar que se cumple que $\left(1+\sqrt{3}\mathrm{i}\right)^n = 2^n\left(\cos\dfrac{n\pi}{3} + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\dfrac{n\pi}{3}\right)$ para $n \in \mathbb{Z}^+$. *[7 puntos]*

(c) Sea $z = \dfrac{\sqrt{2}v + u}{\sqrt{2}v - u}$.

Compruebe que $\mathrm{Re}\,z = 0$. *[6 puntos]*