M07/5/MATSD/SP2/SPA/TZ0/XX

22077410

ESTUDIOS MATEMÁTICOS
NIVEL MEDIO
PRUEBA 2

Martes 8 de mayo de 2007 (mañana)

1 hora 30 minutos

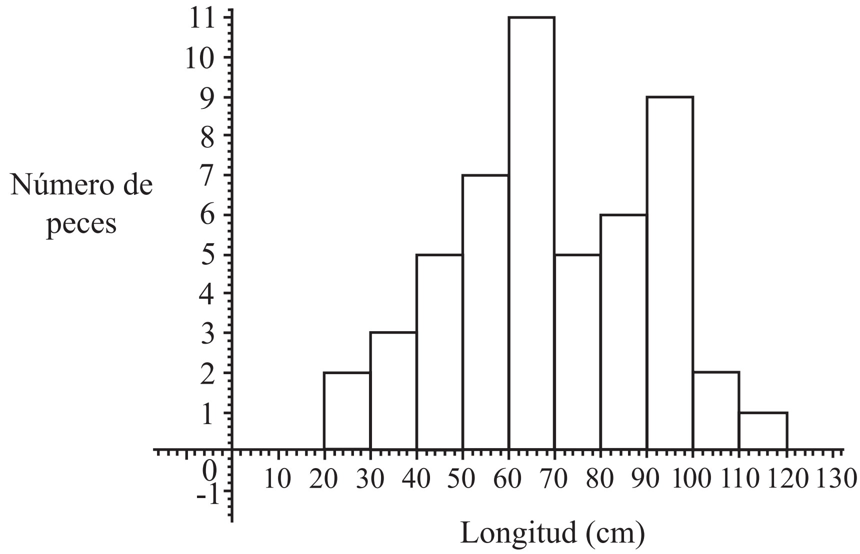
INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste todas las preguntas.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o correcta con tres cifras significativas.

Empiece una página nueva para cada respuesta. Se recomienda que muestre todos los cálculos, siempre que sea posible. Cuando la respuesta sea incorrecta se otorgarán algunos puntos siempre que aparezca el método empleado y éste sea correcto. Para los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el proceso seguido hasta su obtención. Por ejemplo, cuando deba utilizar gráficas de una calculadora de pantalla gráfica para hallar soluciones, deberá dibujar esas gráficas en su respuesta.

1. *[Puntuación máxima: 14]*

La figura que aparece a continuación muestra las longitudes en centímetros de una serie de peces encontrados en la red de un pequeño barco pesquero.



(a) Halle el número total de peces que hay en la red. *[2 puntos]*

(b) Halle (i) el intervalo modal de longitudes,

(ii) el intervalo que contiene la mediana de la longitud,

(iii) una estimación de la longitud media. *[5 puntos]*

(c) (i) Escriba una estimación de la desviación típica de las longitudes.

(ii) ¿Cuántos peces (de haber alguno) tienen una longitud **mayor que** tres veces la desviación típica **por encima** de la media? *[3 puntos]*

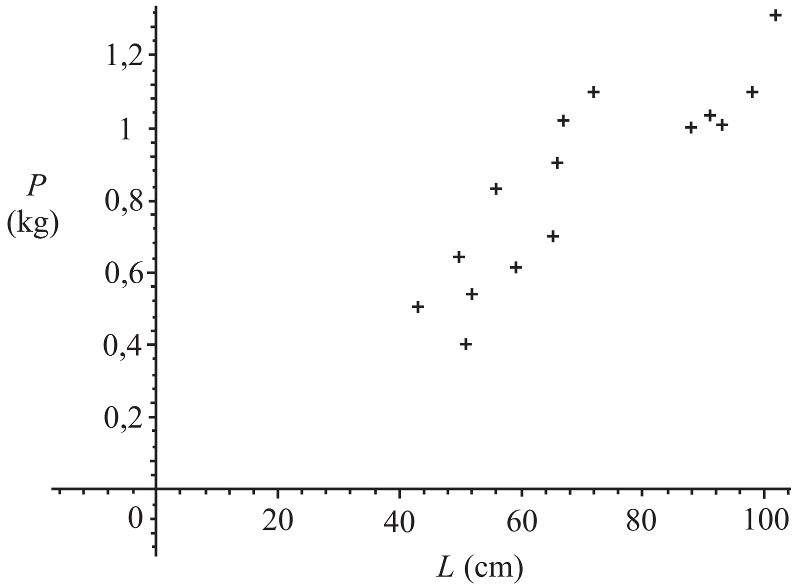
La empresa pesquera debe pagar una multa en caso de que más de un 10 % de los peces capturados tenga una longitud inferior a 40 cm.

(d) Haga los cálculos necesarios para decidir si la empresa será multada. *[2 puntos]*

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 1: continuación)

Se pesa una muestra de 15 de estos peces. Se representa el peso, P, frente a la longitud, L, tal y como se muestra a continuación.



(e) De las siguientes afirmaciones acerca de esta representación gráfica, exactamente **dos** de ellas son correctas. Identifique las dos afirmaciones que son correctas. *[2 puntos]*

Nota: No hace falta que introduzca los datos en una calculadora de pantalla gráfica **o que** calcule el valor exacto de r.

(i) El valor de r (coeficiente de correlación) es aproximadamente igual a 0,871.

(ii) Hay una relación lineal exacta entre P y L.

(iii) La recta de regresión de P sobre L tiene por ecuación: $P = 0{,}012L + 0{,}008$.

(iv) Hay una correlación negativa entre la longitud y el peso.

(v) El valor de r (coeficiente de correlación) es aproximadamente igual a 0,998.

(vi) La recta de regresión de P sobre L tiene por ecuación: $P = 63{,}5L + 16{,}5$.

2. *[Puntuación máxima: 18]*

(i) Juana tiene un cilindro circular con tapa. El cilindro tiene una altura de 39 **cm** y un diámetro de 65 **mm**.

(a) Calcule el volumen del cilindro **en cm³**. Dé la respuesta redondeando a **dos** cifras decimales. *[3 puntos]*

El cilindro se utiliza para guardar pelotas de tenis.
Cada pelota tiene un **radio** de 3,25 cm.

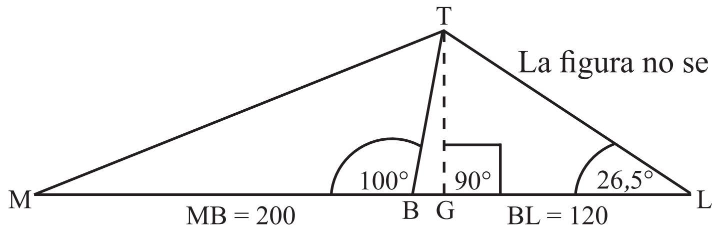
(b) Calcule cuántas pelotas puede meter Juana en el cilindro hasta llenarlo por completo. *[1 punto]*

(c) (i) Juana llena el cilindro con el número de pelotas hallado en el apartado (b) y pone la tapa. Calcule el volumen de aire que hay dentro del cilindro, correspondiente a los huecos que hay entre las pelotas de tenis.

(ii) Convierta la respuesta del apartado (c) (i) a metros cúbicos. *[4 puntos]*

(ii) Una vieja torre (BT) está inclinada 10° con respecto a la vertical (representada por la recta TG).

La base de la torre se encuentra en B, de tal manera que $M\hat{B}T = 100^\circ$.
Leonardo está de pie en L, en terreno llano y está a una distancia de 120 m de B, del lado hacia el cual se inclina la torre.
Mide el ángulo que hay entre el suelo y la parte superior de la torre, obteniendo como resultado $B\hat{L}T = 26{,}5^\circ$.



La figura no se ha dibujado a escala

(a) (i) Halle el valor del ángulo $B\hat{T}L$.

(ii) Utilice el triángulo BTL para calcular la distancia BT desde la base, B, hasta la parte superior de la torre, T. *[5 puntos]*

(b) Calcule TG, la altura en vertical de la parte superior de la torre. *[2 puntos]*

(c) En este momento, Leonardo camina hasta el punto M, situado a 200 m de B al otro lado de la torre. Calcule la distancia entre M y la parte superior de la torre T. *[3 puntos]*

3. *[Puntuación máxima: 21]*

Dado $f(x) = x^2 - 3x^{-1},\ x \in \mathbb{R},\ -5 \leq x \leq 5,\ x \neq 0$

(i) (a) Escriba la ecuación de la asíntota vertical. *[1 punto]*

(b) Halle $f'(x)$. *[2 puntos]*

(c) Utilizando la calculadora de pantalla gráfica o cualquier otro método alternativo, escriba las coordenadas de algún punto donde la pendiente de la gráfica de $y = f(x)$ sea igual a cero. *[2 puntos]*

(d) Escriba todos los intervalos dentro del dominio dado para los cuales $f(x)$ es creciente. *[3 puntos]*

(ii) Se patea un balón de fútbol desde un punto A (a, 0), 0 < a < 10 situado en el suelo hacia la portería, situada a la derecha de A.

El balón sigue un camino que viene dado por **una parte** de la siguiente gráfica

$$y = -0,021x^2 + 1,245x - 6,01,\ x \in \mathbb{R},\ y \geq 0.$$

x es la distancia en horizontal del balón al origen de coordenadas
y representa la altura sobre el nivel del suelo
Tanto x como y están en metros.

(a) Utilizando la calculadora de pantalla gráfica o cualquier otro método alternativo, halle el valor de a. *[1 punto]*

(b) Halle $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. *[2 puntos]*

(c) (i) Utilice la respuesta que dio en el apartado (b) para calcular la distancia en horizontal que ha viajado el balón desde A hasta el momento en que su altura alcanza su máximo valor.

(ii) Halle la altura máxima en vertical que alcanza el balón. *[4 puntos]*

(d) Dibuje con precisión una gráfica que muestre el camino seguido por el balón, desde el punto en el que se le patea hasta el punto en el que vuelve a caer al suelo. Utilice 1 cm para representar 5 m a lo largo del eje horizontal, y 1 cm para representar 2 m en el eje vertical. *[4 puntos]*

Los postes de la portería están situados a 35 m **del punto donde se pateó el balón.**

(e) ¿A qué altura pasa el balón por encima de los postes de la portería? *[2 puntos]*

4. *[Puntuación máxima: 16]*

(i) Los números naturales: 1, 2, 3, 4, 5… forman una progresión aritmética.

(a) Establezca para esta progresión los valores de u_1 y de d. *[2 puntos]*

(b) Utilice una fórmula adecuada para demostrar que la suma de los números naturales desde 1 hasta n, viene dada por $\frac{1}{2}n\,(n+1)$. *[2 puntos]*

(c) Calcule la suma de los números naturales desde 1 hasta 200. *[2 puntos]*

(ii) Una progresión geométrica G_1 tiene como primer término 1 y como razón común 3.

(a) La suma de los n primeros términos de G_1 es igual a 29 524. Halle n. *[3 puntos]*

Una segunda progresión geométrica G_2 es de la forma $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27} \ldots$

(b) Establezca la razón común de G_2. *[1 punto]*

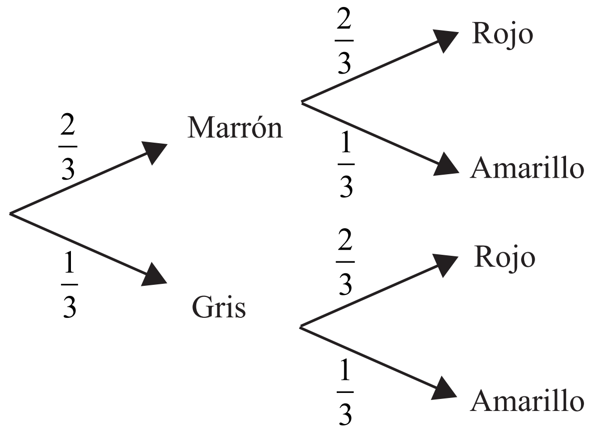
(c) Calcule la suma de los 10 primeros términos de G_2. *[2 puntos]*

(d) Explique por qué el resultado de la suma de los 1000 primeros términos de G_2 es el mismo que el de la suma de los 10 primeros términos, cuando se redondea el resultado a tres cifras significativas. *[1 punto]*

(e) Utilizando los resultados obtenidos en los apartados (a) a (c) o bien con cualquier otro método, calcule la suma de los 10 primeros términos de la progresión $2, 3\frac{1}{3}, 9\frac{1}{9}, 27\frac{1}{27} \ldots$
Dé la respuesta **redondeando a 1 cifra decimal**. *[3 puntos]*

5. *[Puntuación máxima: 21]*

(i) Néstor tiene tres perros. Dos son marrones y uno es gris. Cuando da de comer a los perros, utiliza tres cuencos, repartiendo uno a cada perro de manera aleatoria. Hay dos cuencos rojos y un cuenco amarillo. Esta información se muestra en el diagrama de árbol que aparece a continuación.

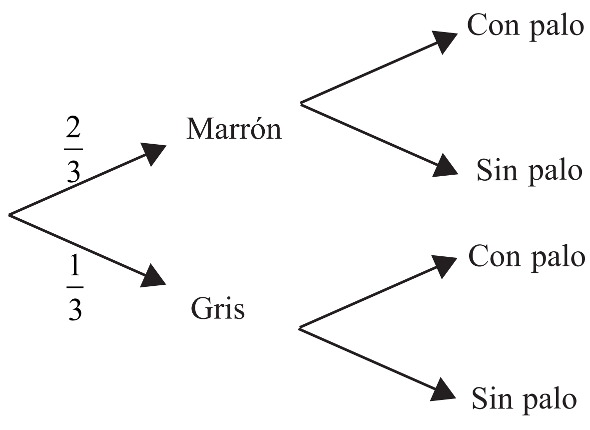


(a) Se elige uno de los perros al azar.

(i) Halle P (el perro es gris y tiene el cuenco amarillo).

(ii) Halle P (al perro no le ha tocado el cuenco amarillo). *[3 puntos]*

(b) Néstor lleva a menudo a los perros al parque después de que hayan terminado de comer. Se ha fijado que el perro gris pasa una cuarta parte del tiempo jugando con un palo, mientras que ambos perros marrones pasan la mitad del tiempo jugando con palos. Esta información se muestra en el diagrama de árbol que aparece a continuación.



(i) Copie el diagrama de árbol y añada los cuatro valores de probabilidad que faltan sobre las ramas referidas a 'jugar con un palo'.

Durante un viaje al parque, se elige al azar a uno de los perros.

(ii) Halle P (el perro es gris o está jugando con un palo, pero no ambos).

(iii) Halle P (el perro es gris, sabiendo que está jugando con un palo).

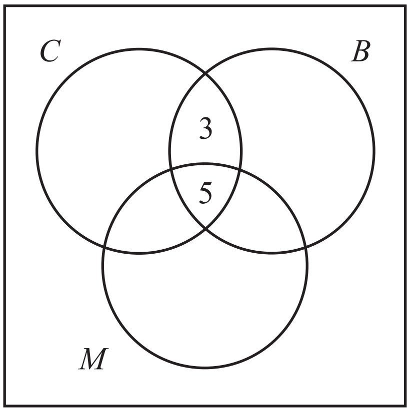
(iv) Halle P (el perro es gris y comió del cuenco amarillo y no está jugando con un palo). *[9 puntos]*

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 5: continuación)

(ii) Hay 49 ratones en una tienda de animales domésticos.
30 ratones son blancos.
27 ratones son machos.
18 ratones tienen la cola corta.
8 ratones son blancos y tienen la cola corta.
11 ratones son machos y tienen la cola corta.
7 ratones son machos pero ni son blancos ni tienen la cola corta.
5 ratones tienen las tres características anteriormente mencionadas y
2 ratones no tienen ninguna de ellas.

Copie a su hoja de respuestas del examen el diagrama que aparece a continuación.



U B representa a los ratones blancos.
M representa a los ratones macho.
C representa a los ratones de cola corta.

(a) Complete el diagrama, utilizando la información dada en el enunciado. *[4 puntos]*

(b) Halle (i) $n(M \cap B)$

(ii) $n(M' \cup C)$ *[3 puntos]*

Se eligen dos ratones sin reposición.

(c) Halle P (ambos ratones son de cola corta). *[2 puntos]*