ÉTUDES MATHÉMATIQUES
NIVEAU MOYEN
ÉPREUVE 2

Mardi 8 mai 2007 (matin)

1 heure 30 minutes

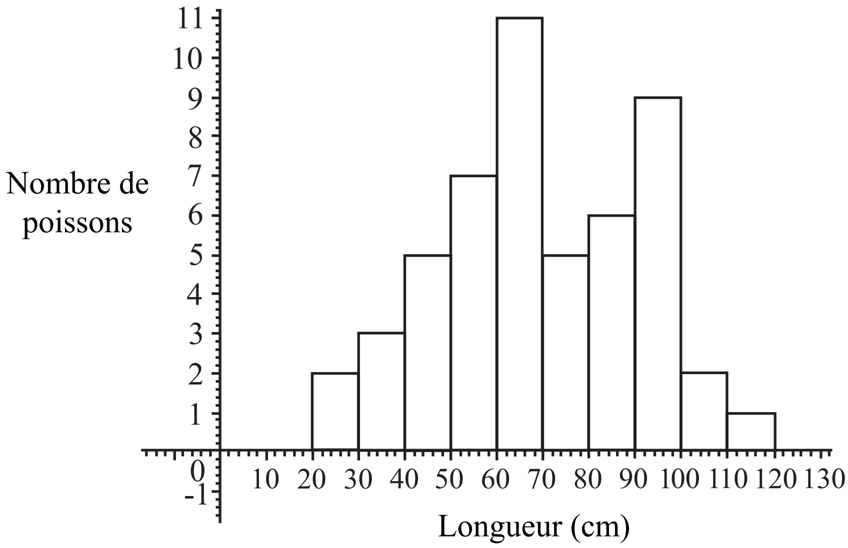
INSTRUCTIONS DESTINÉES AUX CANDIDATS

- N'ouvrez pas cette épreuve avant d'y être autorisé(e).
- Répondez à toutes les questions.
- À moins qu'il en soit indiqué autrement dans l'énoncé de la question, toutes les réponses numériques doivent être exactes ou données avec trois chiffres significatifs corrects.

Veuillez répondre à chaque question sur une nouvelle page. On vous recommande d'indiquer votre raisonnement autant que possible. Lorsque la réponse est fausse, certains points seront accordés si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. Les solutions obtenues à l'aide de calculatrices à écran graphique doivent être accompagnées d'un raisonnement adéquat. Par exemple, si des graphiques sont utilisés pour trouver la solution, veuillez inclure un croquis de ces graphiques dans votre réponse.

1. *[Note maximum : 14]*

La figure ci-dessous représente les longueurs en centimètres des poissons trouvés dans le filet d'un petit chalutier.



(a) Trouvez le nombre total de poissons dans le filet. *[2 points]*

(b) Trouvez (i) l'intervalle de longueur modale,

(ii) l'intervalle contenant la longueur médiane,

(iii) une estimation de la longueur moyenne. *[5 points]*

(c) (i) Écrivez une estimation de l'écart-type des longueurs.

(ii) Combien de poissons (s'il y en a) ont une longueur **supérieure** à trois écarts-types **au-dessus** de la moyenne ? *[3 points]*

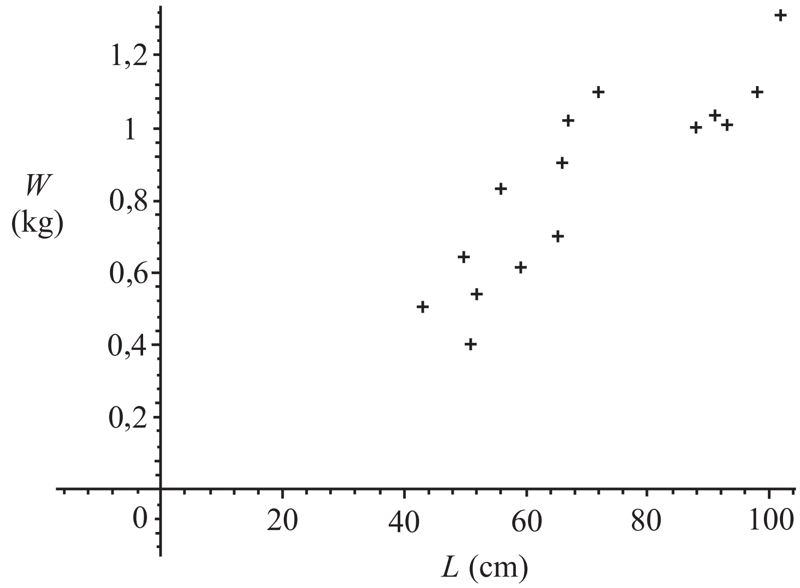
La compagnie de pêche doit payer une amende si plus de 10% de la pêche a une longueur inférieure à 40 cm.

(d) Effectuez un calcul pour décider si la compagnie doit payer l'amende. *[2 points]*

(Suite de la question à la page suivante)

(Suite de la question 1)

Un échantillon de 15 poissons est pesé. Les poids, W, sont placés par rapport aux longueurs, L, comme représenté ci-dessous.



(e) Exactement **deux** propositions concernant cette figure sont correctes. Identifiez les deux propositions correctes. *[2 points]*

Remarque : Vous **n'avez pas** besoin d'entrez les données dans votre calculatrice graphique **ou** de calculer r exactement.

(i) La valeur de r, coefficient de corrélation, est approximativement 0,871.

(ii) Il y a une relation linéaire exacte entre W et L.

(iii) La droite de régression de W en fonction de L a pour équation $W = 0{,}012L + 0{,}008$.

(iv) Il y a une corrélation négative entre la longueur et le poids.

(v) La valeur de r, coefficient de corrélation, est approximativement 0,998.

(vi) La droite de régression de W en fonction de L a pour équation $W = 63{,}5L + 16{,}5$.

2. *[Note maximum : 18]*

(i) Jenny a un cylindre circulaire muni d'un couvercle. Le cylindre a une hauteur de 39 **cm** et un diamètre de 65 **mm**.

(a) Calculer le volume du cylindre **en cm³**. Donnez votre réponse correcte jusqu'à **deux** chiffres après la virgule. *[3 points]*

Le cylindre est utilisé pour ranger des balles de tennis.
Chaque balle a un **rayon** de 3,25 cm.

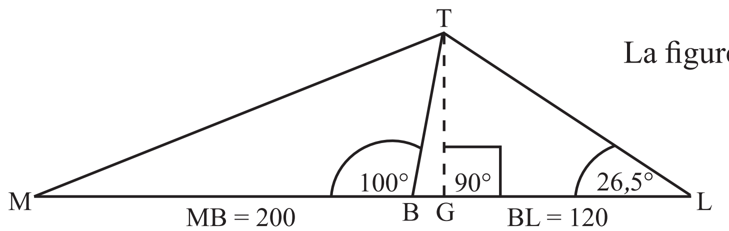
(b) Calculer combien de balles de tennis Jenny peut mettre dans le cylindre s'il est rempli jusqu'en haut. *[1 point]*

(c) (i) Jenny remplit le cylindre avec le nombre de balles trouvé dans la partie (b) et met le couvercle par-dessus. Calculez le volume d'air à l'intérieur du cylindre dans les espaces entre les balles.

(ii) Convertissez votre réponse de (c) (i) en mètres cubes. *[4 points]*

(ii) Une vieille tour (BT) penche de 10° par rapport à la verticale (représentée par la droite TG).

La base de la tour est en B de telle sorte que $M\hat{B}T = 100^\circ$.
Léonardo se tient en L en terrain plat à 120 m de B du côté où la tour penche.
Il mesure l'angle entre le sol et le sommet T de la tour et trouve $B\hat{L}T = 26,5^\circ$.



La figure n'est pas à l'échelle.

(a) (i) Trouvez la mesure de l'angle $B\hat{T}L$.

(ii) En utilisant le triangle BTL, calculez la distance oblique BT de la base B au sommet T de la tour. *[5 points]*

(b) Calculez la hauteur verticale TG du sommet de la tour. *[2 points]*

(c) Léonardo marche maintenant jusqu'au point M, qui est à une distance de 200 m à partir de B du côté opposé de la tour. Calculer la distance de M jusqu'au sommet T de la tour. *[3 points]*

3. *[Note maximum : 21]*

Soit $f(x) = x^2 - 3x^{-1}$, $x \in \mathbb{R}$, $-5 \le x \le 5$, $x \ne 0$,

(i) (a) Écrivez l'équation de l'asymptote verticale. *[1 point]*

(b) Trouvez $f'(x)$. *[2 points]*

(c) En utilisant votre calculatrice graphique ou autrement, donner les coordonnées de tout point où la courbe de $y = f(x)$ a une pente nulle. *[2 points]*

(d) Écrivez tous les intervalles du domaine donné, sur lesquels $f(x)$ est croissante. *[3 points]*

(ii) Un ballon de football est frappé du point A (a ; 0), $0 < a < 10$ sur le sol vers des buts à la droite de A.

Le ballon suit une trajectoire qui peut être modélisée par une **partie** de la courbe

$$y = -0,021x^2 + 1,245x - 6,01; x \in \mathbb{R}, y \ge 0.$$

x est la distance horizontale du ballon depuis l'origine
y est la hauteur au-dessus du sol
x et y sont mesurés en mètres.

(a) En utilisant votre calculatrice graphique ou autrement, trouvez la valeur de a. *[1 point]*

(b) Trouvez $\dfrac{dy}{dx}$. *[2 points]*

(c) (i) Utilisez votre réponse à la question (b) pour calculer la distance horizontale parcourue depuis A par le ballon quand sa hauteur est maximum.

(ii) Trouvez la hauteur verticale maximale atteinte par le ballon. *[4 points]*

(d) Dessinez une courbe montrant la trajectoire du ballon depuis le point où il a été frappé jusqu'au point où il touche le sol de nouveau. Utilisez 1 cm pour représenter 5 m sur l'axe horizontal et 1 cm pour représenter 2 m sur l'échelle verticale. *[4 points]*

Les poteaux des buts sont à 35 m **du point où le ballon a été frappé**.

(e) A quelle hauteur le ballon passe-t-il au-dessus des poteaux des buts ? *[2 points]*

4. *[Note maximum : 16]*

(i) Les nombres naturels: 1, 2, 3, 4, 5… forment une suite arithmétique.

(a) Donnez les valeurs de u_1 et de d pour cette suite. *[2 points]*

(b) Utilisez une formule appropriée pour montrer que la somme des entiers naturels de 1 à n est donnée par $\frac{1}{2}n\,(n+1)$. *[2 points]*

(c) Calculez la somme des entiers naturels de 1 à 200. *[2 points]*

(ii) Une suite géométrique G_1 a 1 comme premier terme et 3 comme raison.

(a) La somme des n premiers de G_1 est 29 524. Calculez n. *[3 points]*

Une deuxième suite géométrique G_2 est de la forme $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}\ldots$

(b) Donnez la raison de G_2. *[1 point]*

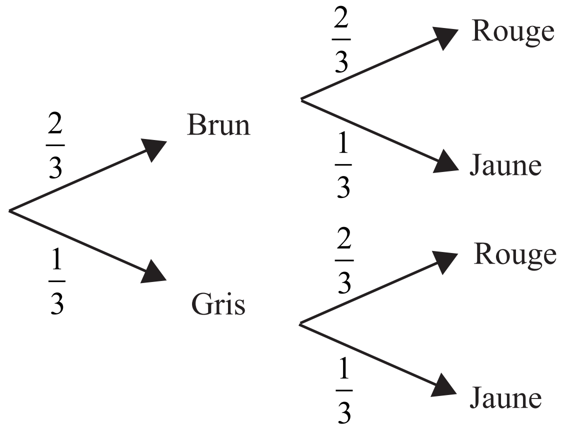
(c) Calculez la somme des 10 premiers termes de G_2. *[2 points]*

(d) Expliquez pourquoi la somme des 1000 premiers termes de G_2 donnera la même réponse que la somme des 10 premiers termes, une fois arrondie à trois chiffres significatifs. *[1 point]*

(e) En utilisant vos résultats des parties (a) à (c), ou autrement, calculez la somme des 10 premier termes de la suite $2, 3\frac{1}{3}, 9\frac{1}{9}, 27\frac{1}{27}\ldots$
Donnez votre réponse **correcte avec un chiffre après la virgule**. *[3 points]*
Remarque : l'écriture $3\frac{1}{3}$ désique $3+\frac{1}{3}$; de même $9\frac{1}{9}$ désique $9+\frac{1}{9}$, *etc.*

5. *[Note maximum : 21]*

(i) Neil possède trois chiens. Deux sont bruns et un est gris. Lorsqu'il nourrit ses chiens, Neil utilise trois assiettes et il les distribue au hasard. Il y a deux assiettes rouges et une assiette jaune. Ces informations sont représentées dans le diagramme en arbre ci-dessous.

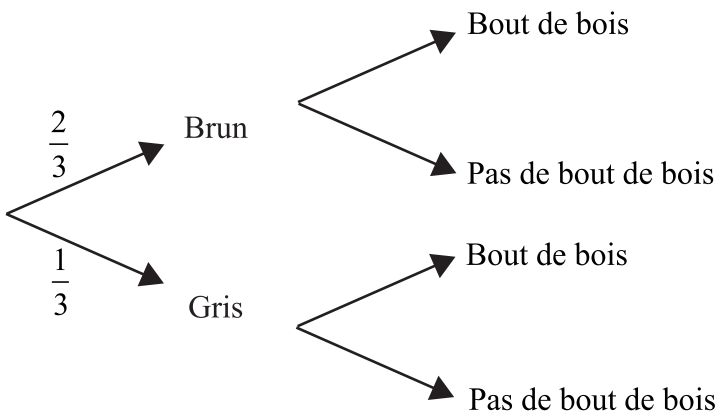


(a) L'un des chiens est choisi au hasard.

(i) Déterminez P (le chien est gris et a une assiette jaune).

(ii) Déterminez P (le chien n'a pas l'assiette jaune). *[3 points]*

(b) Neil emmène souvent les chiens au parc après qu'ils aient mangé. Il a remarqué que le chien gris joue avec un bout de bois pendant un quart du temps et que les deux chiens bruns jouent avec des bouts de bois pendant la moitié du temps ; ces informations sont représentées sur le diagramme en arbre ci-dessous.



(i) Recopiez le diagramme en arbre et complétez-le avec les quatre probabilités manquant sur les branches qui concernent les jeux avec les bouts de bois.

Pendant une sortie au parc, l'un des chiens est choisi au hasard.

(ii) Déterminez P (soit le chien est gris soit il joue avec un bout de bois, mais pas les deux à la fois).

(iii) Déterminez P (le chien est gris sachant qu'il joue avec un bout de bois).

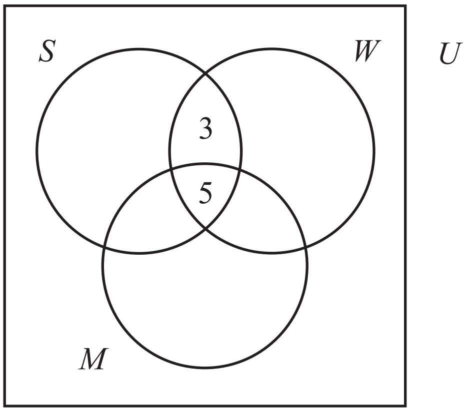
(iv) Déterminez P (le chien est gris et il a mangé dans le bol jaune et il ne joue pas avec un bout de bois). *[9 points]*

(Suite de la question à la page suivante)

(Suite de la question 5)

(ii) Il y a 49 souris dans une animalerie.
30 souris sont blanches.
27 souris sont des mâles.
18 souris ont la queue courte.
8 souris sont blanches avec la queue courte.
11 souris sont des mâles avec la queue courte.
7 souris sont des mâles mais ni blanches ni avec la queue courte.
5 souris ont les trois caractéristiques et
2 n'en ont aucune.

Recopiez le diagramme ci-dessous sur votre copie.



W représente les souris blanches.
M représente les souris mâles.
S représente les souris à la queue courte.

(a) Complétez le diagramme, en utilisant les informations données dans la question. *[4 points]*

(b) Trouvez (i) $n(M \cap W)$

(ii) $n(M' \cup S)$ *[3 points]*

Deux souris sont choisies sans remplacement.

(c) Trouvez P (les deux souris ont la queue courte). *[2 points]*