

ESTUDIOS MATEMÁTICOS
NIVEL MEDIO
PRUEBA 2

Jueves 4 de mayo de 2006 (mañana)

1 hora 30 minutos

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste todas las preguntas.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o correcta con tres cifras significativas.

Empiece una página nueva para cada respuesta. Se recomienda que muestre todos los cálculos, siempre que sea posible. Cuando la respuesta sea incorrecta se otorgarán algunos puntos siempre que aparezca el método empleado y éste sea correcto. Para los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el proceso seguido hasta su obtención. Por ejemplo, cuando deba utilizar gráficas de una calculadora de pantalla gráfica para hallar soluciones, deberá dibujar esas gráficas en su respuesta.

1. [Puntuación máxima: 17]

(a) La función $f(x)$ se define por $f(x) = 2x^2 - 10x + 60$, $-5 \leq x \leq 8$.

x	-5	0	2	5	8
$f(x)$	160	a	b	60	108

- (i) Escriba el valor de a y el valor de b . [2 puntos]
- (ii) Utilizando los valores de la tabla anterior, dibuje con precisión la gráfica de $f(x)$ sobre un sistema de ejes. Utilice una escala de 1 cm para representar 1 unidad en el eje horizontal y 1 cm para representar 20 unidades en el eje vertical. [4 puntos]
- (iii) Compruebe que las coordenadas del vértice de la gráfica son (2,5, 47,5). [3 puntos]
- (iv) Establezca los valores de x para los cuales la función es creciente. [2 puntos]

(b) La función $h(x)$ se define por:

$$h(x) = 80, 0 \leq x \leq 8$$

- (i) Sobre los mismos ejes utilizados para la parte (a), dibuje con precisión la gráfica de $h(x)$. [2 puntos]
- (ii) Halle las coordenadas de los puntos en los cuales $f(x) = h(x)$. [2 puntos]
- (iii) Halle la distancia vertical desde el vértice de la gráfica de $f(x)$ hasta la recta $h(x)$. [2 puntos]

2. [Puntuación máxima: 19]

(i) Sea U el conjunto de todos los enteros positivos de 1 a 21 inclusive.

A , B y C son subconjuntos de U tales que:

A contiene todos los enteros positivos que son factores de 21,
 B es el conjunto de múltiplos de 7 contenidos en U ,
 C es el conjunto de números impares contenidos en U .

(a) Enumere todos los miembros del conjunto A . [2 puntos]

(b) Escriba todos los miembros de:

(i) $A \cup B$,

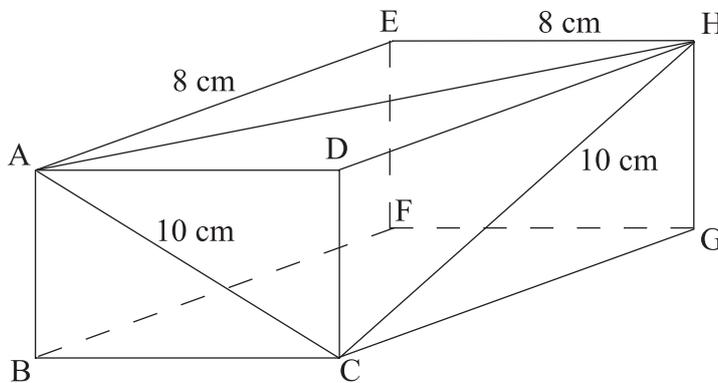
(ii) $C' \cap B$.

[4 puntos]

(c) Halle la probabilidad de que un miembro de A elegido al azar también sea miembro de $A \cap B \cap C$. [2 puntos]

(ii) La figura que aparece debajo es un prisma rectangular en el cual se indican los largos de algunos lados y algunas diagonales.

$AC = 10$ cm, $CH = 10$ cm, $EH = 8$ cm, $AE = 8$ cm.



(No representado a escala.)

(a) Calcule el largo de AH . [2 puntos]

(b) Halle la medida del ángulo ACH . [3 puntos]

(c) Compruebe que el área total del prisma rectangular es 320 cm². [3 puntos]

(d) Entre los planos $ABCD$, $CGHD$ y $ABGH$ se encuentra un prisma triangular. Calcule el volumen de ese prisma. [3 puntos]

3. [Puntuación máxima: 17]

La función $g(x)$ se define por $g(x) = \frac{1}{8}x^4 + \frac{9}{4}x^2 - 5x + 7$, $x \geq 0$.

(a) Halle $g(2)$. [2 puntos]

(b) Calcule $g'(x)$. [3 puntos]

La gráfica de la función $y = g(x)$ tiene una tangente T_1 en el punto donde $x = 2$.

(c) (i) Compruebe que la pendiente de T_1 es 8.

(ii) Halle la ecuación de T_1 . Escriba la ecuación en la forma $y = mx + c$. [5 puntos]

(d) La gráfica tiene otra tangente, T_2 , en el punto $\left(1, \frac{35}{8}\right)$. T_2 tiene pendiente cero.

Escriba la ecuación de T_2 . [2 puntos]

(e) (i) Dibuje aproximadamente la gráfica de $y = g(x)$ en la región $0 \leq x \leq 3$, $0 \leq y \leq 22$.

(ii) Agregue las tangentes T_1 y T_2 a su dibujo aproximado, en las posiciones correctas. [5 puntos]

4. [Puntuación máxima: 19]

- (i) Alex invierte 3.600 euros en una cuenta que paga una tasa de interés (tipo de interés) nominal del 5,4 % anual, compuesto mensualmente. El interés se agrega a la cuenta al final de cada mes.
- (a) Calcule el número de meses **enteros** que tardará en duplicarse la inversión de Alex. [4 puntos]
- (b) (i) Calcule el valor de la inversión luego de nueve años.
- (ii) Halle la tasa (o tipo) de **interés simple** anual que daría el mismo valor para la inversión luego de nueve años. [6 puntos]
- (ii) Annie va a comenzar a trabajar. Va a ganar \$ 26.000 durante el primer año y su salario anual aumentará un 3 % cada año.
- (a) Calcule cuánto ganará Annie durante su quinto año de trabajo. [3 puntos]

Annie gasta \$ 24.800 de lo que gana en su primer año de trabajo. En los años siguientes, el costo de vida aumentará 5 % al año debido a la inflación.

- (b) (i) Calcule en cuántos años Annie va a gastar más de lo que va a ganar.
- (ii) ¿En cuánto superarán los gastos a los ingresos ese año? [6 puntos]

5. [Puntuación máxima: 18]

- (a) Para el proyecto de Estudios Matemáticos, Marty se propuso investigar si el estrés entre los alumnos se relacionaba con el tiempo que tienen que viajar hacia y desde el colegio. La siguiente tabla muestra los resultados de unas de sus encuestas.

Tiempo de viaje (t minutos) ↓	Número de alumnos		
	Estrés alto	Estrés moderado	Estrés bajo
$t \leq 15$	9	5	18
$15 < t \leq 30$	17	8	28
$30 < t$	18	6	7

Marty usó la prueba de χ^2 con un nivel de significación del 5 % para determinar si había relación entre el estrés de los alumnos y el tiempo de viaje.

- (i) Escriba las hipótesis nula y alternativa para esa prueba. [2 puntos]
- (ii) Escriba la tabla de valores esperados. Redondee los valores al entero más cercano. [3 puntos]
- (iii) Compruebe que hay 4 grados de libertad. [1 punto]
- (iv) Calcule el estadístico χ^2 para estos datos. [2 puntos]

El valor crítico de χ^2 para 4 grados de libertad a un nivel de significación del 5 % es 9,488.

- (v) ¿Qué conclusión puede extraer Marty de esta prueba? Explique la razón de su respuesta. [2 puntos]

- (b) Marty pidió a algunos de sus compañeros de clase que indicaran su nivel de estrés en una escala de 1 a 10, donde 10 era el nivel más alto. También les pidió que cronometraran cuántos minutos les llevaba llegar desde su casa al colegio. A continuación figura una selección al azar de los resultados obtenidos.

Tiempo de viaje (x)	13	24	22	18	36	16	14	20	6	12
Nivel de estrés (y)	3	7	5	4	8	8	4	8	2	6

- (i) Escriba el valor del coeficiente (lineal) de correlación para esta información. [1 punto]
- (ii) Explique qué indica un coeficiente de correlación de valor positivo. [1 punto]
- (iii) Escriba la ecuación de la recta de regresión de y sobre x en la forma $y = ax + b$. [2 puntos]

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 5 (b): continuación)

- (iv) Utilice la ecuación de la parte (iii) para determinar el nivel de estrés de un alumno que viaja durante tres cuartos de hora para llegar al colegio. *[2 puntos]*

 - (v) ¿Su respuesta para la parte (iv) puede considerarse fiable? Explique la razón de su respuesta. *[2 puntos]*
-