



**ÉTUDES MATHÉMATIQUES**  
**NIVEAU MOYEN**  
**ÉPREUVE 2**

Jeudi 4 mai 2006 (matin)

1 heure 30 minutes

---

**INSTRUCTIONS DESTINÉES AUX CANDIDATS**

- N'ouvrez pas cette épreuve avant d'y être autorisé(e).
- Répondez à toutes les questions.
- À moins qu'il en soit indiqué autrement dans l'énoncé de la question, toutes les réponses numériques doivent être exactes ou données avec trois chiffres significatifs corrects.

*Veillez répondre à chaque question sur une nouvelle page. On vous recommande d'indiquer votre raisonnement autant que possible. Lorsque la réponse est fausse, certains points seront accordés si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. Les solutions obtenues à l'aide de calculatrices à écran graphique doivent être accompagnées d'un raisonnement adéquat. Par exemple, si des graphiques sont utilisés pour trouver la solution, veuillez inclure un croquis de ces graphiques dans votre réponse.*

**1.** [Note maximum : 17]

(a) Une fonction  $f(x)$  est définie par  $f(x) = 2x^2 - 10x + 60$ ,  $-5 \leq x \leq 8$ .

$x$	-5	0	2	5	8
$f(x)$	160	$a$	$b$	60	108

- (i) Écrivez les valeurs de  $a$  et  $b$ . [2 points]
- (ii) En utilisant les valeurs de la table ci-dessus, dessinez dans un repère la courbe représentative de  $f(x)$ . Utilisez une échelle de 1cm pour représenter 1 unité sur l'axe horizontal et 1 cm pour représenter 20 unités sur l'axe vertical. [4 points]
- (iii) Montrez que les coordonnées du sommet de la courbe sont (2,5 ; 47,5). [3 points]
- (iv) Donnez les valeurs de  $x$  pour lesquelles la fonction est croissante. [2 points]

(b) Une deuxième fonction  $h(x)$  est définie par :

$$h(x) = 80, 0 \leq x \leq 8.$$

- (i) Dans le même repère utilisé pour la partie (a), dessinez la courbe représentative de  $h(x)$ . [2 points]
- (ii) Trouvez les coordonnées des points auxquels  $f(x) = h(x)$ . [2 points]
- (iii) Trouvez la distance verticale entre le sommet de la courbe représentative de  $f(x)$  et la droite  $h(x)$ . [2 points]

2. [Note maximum : 19]

(i) Soit  $U$  l'ensemble de tous les entiers positifs de 1 à 21 inclus.

$A$ ,  $B$  et  $C$  sont des sous-ensembles de  $U$  tels que :

$A$  contient tous les entiers positifs qui sont des facteurs de 21,  
 $B$  est l'ensemble des multiples de 7 contenus dans  $U$ ,  
 $C$  est l'ensemble des nombres impairs contenus dans  $U$ .

(a) Donnez la liste de tous les éléments de l'ensemble  $A$ . [2 points]

(b) Écrivez tous les éléments de

(i)  $A \cup B$ ,

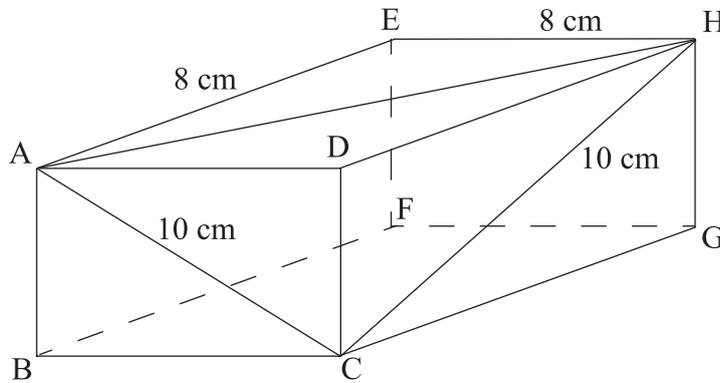
(ii)  $C' \cap B$ .

[4 points]

(c) Trouvez la probabilité pour qu'un élément de  $A$  choisi au hasard soit aussi élément de  $A \cap B \cap C$ . [2 points]

(ii) La figure ci-dessous montre un prisme rectangulaire avec quelques-unes des longueurs de côtés et des longueurs de diagonales.

$AC = 10$  cm,  $CH = 10$  cm,  $EH = 8$  cm,  $AE = 8$  cm.



(La figure n'est pas à l'échelle)

(a) Calculez la longueur de  $AH$ . [2 points]

(b) Trouvez la mesure de l'angle  $\widehat{ACH}$ . [3 points]

(c) Montrez que l'aire totale de la surface de ce prisme rectangulaire est  $320 \text{ cm}^2$ . [3 points]

(d) Un prisme triangulaire est délimité par les plans  $ABCD$ ,  $CGHD$  et  $ABGH$ . Calculez le volume de ce prisme. [3 points]

## 3. [Note maximum : 17]

La fonction  $g(x)$  est définie par  $g(x) = \frac{1}{8}x^4 + \frac{9}{4}x^2 - 5x + 7$ ,  $x \geq 0$ .

(a) Trouvez  $g(2)$ . [2 points]

(b) Calculez  $g'(x)$ . [3 points]

La courbe représentative de la fonction  $y = g(x)$  a une tangente  $T_1$  au point  $x = 2$ .

(c) (i) Montrez que la pente de  $T_1$  est 8.

(ii) Trouvez l'équation de  $T_1$ . Ecrivez cette équation sous la forme  $y = mx + c$ . [5 points]

La courbe a une autre tangente  $T_2$  au point  $\left(1; \frac{35}{8}\right)$ .  $T_2$  a une pente nulle.

(d) Écrivez l'équation de  $T_2$ . [2 points]

(e) (i) Esquissez la courbe représentative de  $y = g(x)$  dans la région  $0 \leq x \leq 3$ ,  $0 \leq y \leq 22$ .

(ii) Ajoutez les deux tangentes  $T_1$  et  $T_2$  à votre esquisse, dans leurs positions correctes. [5 points]

4. [Note maximum : 19]

(i) Alex investit 3600 € dans un compte qui rapporte un taux nominal d'intérêt de 5,4 % par an. À la fin de chaque mois, les intérêts sont calculés et sont ajoutés à ce compte.

(a) Calculez le nombre de mois **complets** qu'il faudra pour que l'investissement d'Alex double. [4 points]

(b) (i) Calculez la valeur de l'investissement d'Alex après neuf années.

(ii) Trouvez le taux annuel **d'intérêt simple** qui donnerait la même valeur à l'investissement après neuf années. [6 points]

(ii) Annie débute dans son premier travail. Elle gagnera un salaire de 26 000 \$ pendant la première année et son salaire augmentera de 3 % chaque année.

(a) Calculez combien Annie gagnera pendant sa cinquième année de travail. [3 points]

Annie dépense 24 800 \$ de ses gains pendant sa première année de travail. Pendant les années qui suivent, à cause de l'inflation, les dépenses d'Annie augmenteront de 5 % par année.

(b) (i) Calculez combien d'années se passeront avant que les dépenses d'Annie dépassent ce qu'elle gagne.

(ii) De combien les dépenses d'Annie seront-elles supérieures à ses gains cette année-là ? [6 points]

5. [Note maximum : 18]

- (a) Pour son projet d'études mathématiques, Marty s'est mis à étudier s'il y avait un lien entre le stress et la durée des trajets que les élèves font pour aller et revenir de son école. Les résultats de l'une de ses enquêtes sont donnés dans la table ci-dessous.

Durée du trajet ( $t$ min)	Nombres d'élèves		
	stress élevé	stress modéré	stress faible
$t \leq 15$	9	5	18
$15 < t \leq 30$	17	8	28
$30 < t$	18	6	7

Il a utilisé un test du  $\chi^2$  à un niveau de signification de 5 % pour déterminer s'il y avait une relation quelconque entre le stress des élèves et la durée des trajets.

- (i) Donnez l'hypothèse nulle et la contre-hypothèse pour ce test. [2 points]
- (ii) Donnez la table des valeurs attendues. Donner les valeurs arrondies à l'entier le plus proche. [3 points]
- (iii) Montrez qu'il y a 4 degrés de liberté. [1 point]
- (iv) Calculez la statistique du  $\chi^2$  pour ces données. [2 points]

La valeur critique du  $\chi^2$  pour 4 degrés de liberté à un seuil de signification de 5 % est 9,488.

- (v) Quelles conclusions Marty peut-il tirer de ce test ? Justifiez votre réponse. [2 points]
- (b) Marty a demandé à quelques-uns de ses camarades d'évaluer leur niveau de stress par une note sur 10, 10 signifiant très élevé. Il leur a aussi demandé de mesurer la durée en minutes de leur trajet de la maison à l'école. Une sélection aléatoire des réponses est listée ci-dessous.

Durée du trajet ( $x$ )	13	24	22	18	36	16	14	20	6	12
Niveau de stress ( $y$ )	3	7	5	4	8	8	4	8	2	6

- (i) Donnez le coefficient de corrélation (linéaire) pour ces informations. [1 point]
- (ii) Expliquez ce qu'indique une valeur positive pour le coefficient de corrélation. [1 point]
- (iii) Donnez l'équation de la droite de régression de  $y$  sur  $x$  sous la forme  $y = ax + b$ . [2 points]
- (iv) Utilisez votre équation de la partie (iii) pour déterminer le niveau de stress d'un élève qui a trois quarts d'heure de trajet pour aller à l'école. [2 points]
- (v) Peut-on considérer votre réponse à la partie (iv) comme fiable ? Justifiez votre réponse. [2 points]