IB DIPLOMA PROGRAMME
PROGRAMME DU DIPLÔME DU BI
PROGRAMA DEL DIPLOMA DEL BI

M06/5/MATME/SP2/FRE/TZ0/XX

22067308

MATHÉMATIQUES
NIVEAU MOYEN
ÉPREUVE 2

Jeudi 4 mai 2006 (matin)

1 heure 30 minutes

INSTRUCTIONS DESTINÉES AUX CANDIDATS

- N’ouvrez pas cette épreuve avant d’y être autorisé(e).
- Répondez à toutes les questions.
- Sauf indication contraire dans l’intitulé de la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.

Veuillez répondre à chaque question sur une nouvelle page. Le total des points ne sera pas nécessairement attribué pour une réponse correcte si le raisonnement n'a pas été indiqué. Les réponses doivent être appuyées par un raisonnement et/ou des explications. En particulier, les solutions obtenues à l'aide d'une calculatrice à écran graphique doivent être accompagnées d'un raisonnement adéquat. Par exemple, si des représentations graphiques sont utilisées pour trouver la solution, veuillez inclure une esquisse de ces représentations graphiques dans votre réponse. Lorsque la réponse est fausse, certains points peuvent être attribués si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. On vous recommande donc de montrer tout votre raisonnement.

1. *[Note maximum : 16]*

Soit S_n la somme des n premiers termes de la série arithmétique $2+4+6+\ldots$.

(a) Trouvez :

(i) S_4 ;

(ii) S_{100}. *[4 points]*

Soit $\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) (i) Trouvez $\boldsymbol{M}^2$.

(ii) Montrez que $\boldsymbol{M}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. *[5 points]*

On admet maintenant que $\boldsymbol{M}^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, pour $n \geq 4$. La somme $\boldsymbol{T}_n$ est définie par :

$$\boldsymbol{T}_n = \boldsymbol{M}^1 + \boldsymbol{M}^2 + \boldsymbol{M}^3 + \ldots + \boldsymbol{M}^n.$$

(c) (i) Donnez $\boldsymbol{M}^4$.

(ii) Trouvez $\boldsymbol{T}_4$. *[4 points]*

(d) En utilisant vos résultats de la partie (a) (ii), trouvez $\boldsymbol{T}_{100}$. *[3 points]*

2. *[Note maximum : 18]*

Considérez les fonctions f et g telles que $f(x) = 3x - 5$ et $g(x) = x - 2$.

(a) Trouvez la fonction inverse, f^{-1}. *[3 points]*

(b) Étant donné que $g^{-1}(x) = x + 2$, trouvez $(g^{-1} \circ f)(x)$. *[2 points]*

(c) Étant donné aussi que $(f^{-1} \circ g)(x) = \dfrac{x+3}{3}$, résolvez $(f^{-1} \circ g)(x) = (g^{-1} \circ f)(x)$. *[2 points]*

Soit $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, $x \neq 2$.

(d) (i) **Esquissez** la courbe représentative de h pour $-3 \leq x \leq 7$ et $-2 \leq y \leq 8$, y compris les asymptotes.

(ii) Donnez les **équations** de ces asymptotes. *[5 points]*

(e) L'expression $\dfrac{3x-5}{x-2}$ peut aussi s'écrire comme $3 + \dfrac{1}{x-2}$. Utilisez ce fait pour répondre aux questions suivantes.

(i) Trouvez $\int h(x)\,\mathrm{d}x$.

(ii) **À partir de là**, calculez la valeur **exacte** de $\int_3^5 h(x)\,\mathrm{d}x$. *[5 points]*

(f) Sur votre esquisse, hachurez la région dont l'aire est représentée par $\int_3^5 h(x)\,\mathrm{d}x$. *[1 point]*

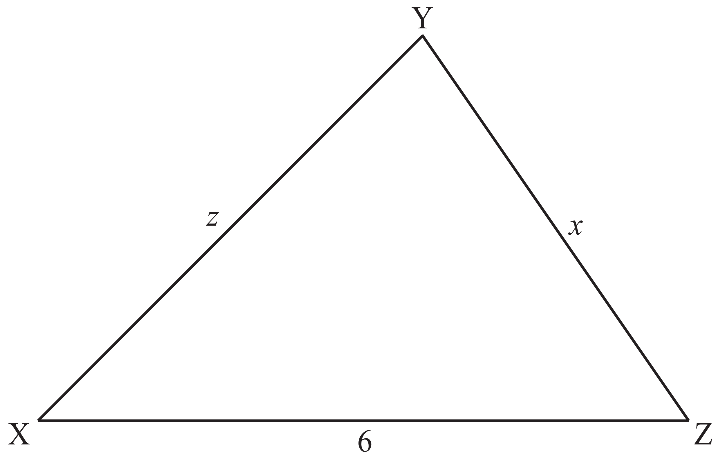
3. *[Note maximum : 20]*

(a) Soit $y = -16x^2 + 160x - 256$. Étant donné que y a une valeur maximum, trouvez :

(i) la valeur de x donnant la valeur maximum de y ;

(ii) la valeur maximum de y. *[4 points]*

Le triangle XYZ est tel que $\mathrm{XZ} = 6$, $\mathrm{YZ} = x$ et $\mathrm{XY} = z$ comme dans la représentation suivante. Le périmètre du triangle XYZ est 16.



(b) (i) Exprimez z en fonction de x.

(ii) En utilisant la loi des cosinus, exprimez z^2 en fonction de x et de $\cos Z$.

(iii) À partir de là, montrez que $\cos Z = \dfrac{5x-16}{3x}$. *[7 points]*

Soit A l'aire du triangle XYZ.

(c) Montrez que $A^2 = 9x^2 \sin^2 Z$. *[2 points]*

(d) À partir de là, montrez que $A^2 = -16x^2 + 160x - 256$. *[4 points]*

(e) (i) À partir de là, donnez l'aire maximum du triangle XYZ.

(ii) Quelle est la nature du triangle dont l'aire est maximum ? *[3 points]*

4. *[Note maximum : 17]*

Dans une grand établissement scolaire, les tailles de tous les élèves de quatorze ans sont mesurées.

Les tailles des filles sont normalement distribuées avec une moyenne de 155 cm et un écart-type de 10 cm.

Les tailles des garçons sont normalement distribuées avec une moyenne de 160 cm et un écart-type de 12 cm.

(a) Trouvez la probabilité pour qu'une fille fasse plus de 170 cm. *[3 points]*

(b) Étant donné que 10 % des filles font moins de x cm, trouvez x. *[3 points]*

(c) Étant donné que $90\,\%$ des garçons font entre q cm et r cm, où q et r sont symétriques par rapport à 160 cm, et $q < r$, trouvez la valeur de q et de r. *[4 points]*

Dans le groupe des élèves de quatorze ans, $60\,\%$ sont des filles et $40\,\%$ sont des garçons. La probabilité pour qu'une fille fasse plus de 170 cm a été trouvée dans la partie (a). La probabilité pour qu'un garçon fasse plus de 170 cm est $0{,}202$.

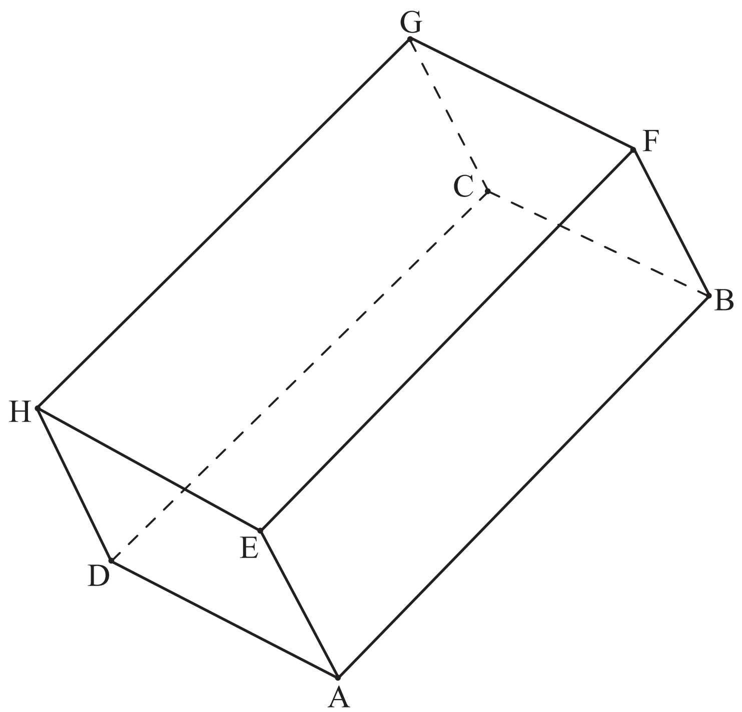
Un élève de quatorze ans est choisi au hasard.

(d) Calculez la probabilité pour que cet élève fasse plus de 170 cm. *[4 points]*

(e) Étant donné que cet élève fait plus de 170 cm, quelle est la probabilité pour que cet élève soit une fille ? *[3 points]*

5. *[Note maximum : 19]*

La figure suivante représente un solide ABCDEFGH. Chacune des six faces est un parallélogramme.



Les coordonnées de A et B sont A(7 ; –3 ; –5) et B(17 ; 2 ; 5).

(a) Trouvez :

(i) $\overrightarrow{AB}$;

(ii) $\left|\overrightarrow{AB}\right|$. *[4 points]*

(Suite de la question à la page suivante)

(Suite de la question 5)

Les informations suivantes sont données.

$$\vec{AD} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \left|\vec{AD}\right| = 9, \quad \vec{AE} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \left|\vec{AE}\right| = 6$$

(b) (i) Calculez $\vec{AD} \cdot \vec{AE}$.

(ii) Calculez $\vec{AB} \cdot \vec{AD}$.

(iii) Calculez $\vec{AB} \cdot \vec{AE}$.

(iv) À partir de là, donnez la mesure de l'angle entre chaque paire d'arrêtes sécantes. *[5 points]*

(c) Calculez le volume du solide ABCDEFGH. *[2 points]*

(d) Les coordonnées de G sont $(9\ ;\ 4\ ;\ 12)$. Trouvez les coordonnées de H. *[3 points]*

(e) Les droites (AG) et (HB) se coupent au point P.

Étant donné que $\vec{AG} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 17 \end{pmatrix}$, trouvez l'angle aigu en P. *[5 points]*