IB DIPLOMA PROGRAMME
PROGRAMME DU DIPLÔME DU BI
PROGRAMA DEL DIPLOMA DEL BI

N05/5/MATSD/SP2/SPA/TZ0/XX

88057410

ESTUDIOS MATEMÁTICOS
NIVEL MEDIO
PRUEBA 2

Viernes 4 de noviembre de 2005 (mañana)

2 horas

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste las cinco preguntas de la Sección A y una pregunta de la Sección B.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o con tres cifras significativas.

Empiece una página nueva para cada respuesta. Se recomienda que muestre todos los cálculos, siempre que sea posible. Cuando la respuesta sea incorrecta se otorgarán algunos puntos siempre que aparezca el método empleado y éste sea correcto. Para los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el proceso seguido hasta su obtención. Por ejemplo, cuando deba utilizar gráficas de una calculadora de pantalla gráfica para hallar soluciones, deberá dibujar esas gráficas en su respuesta.

SECCIÓN A

*Conteste las **cinco** preguntas de esta sección.*

1. *[Puntuación máxima: 16]*

(i) Una función viene dada por la expresión $f(x) = 3(2)^x + 1$.

A continuación aparece la tabla de valores de $f(x)$ para $-3 \le x \le 2$.

x	–3	–2	–1	0	1	2
$f(x)$	1,375	1,75	a	4	7	b

(a) Calcule los valores de a y b. *[2 puntos]*

(b) Dibuje, en papel milimetrado, la gráfica de $f(x)$ para $-3 \le x \le 2$, de modo que 1 cm represente 1 unidad en cada eje. *[4 puntos]*

El dominio de la función $f(x)$ es el conjunto de los números reales, $\mathbb{R}$.

(c) Escriba el recorrido de $f(x)$. *[2 puntos]*

(d) Utilizando su gráfica, o de cualquier otro modo, halle el valor aproximado de x cuando $f(x) = 10$. *[2 puntos]*

(ii) En un triángulo ABC; AB = 3,9 cm; BC = 4,8 cm y el ángulo $\text{ABC} = 82^\circ$.

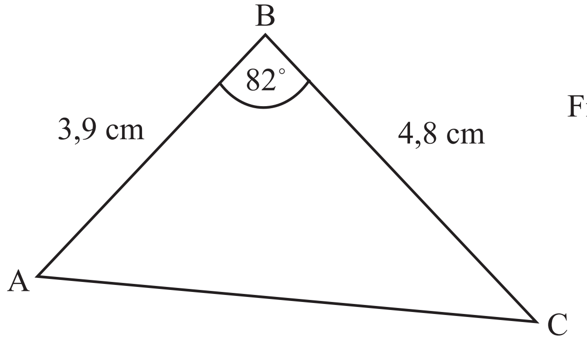


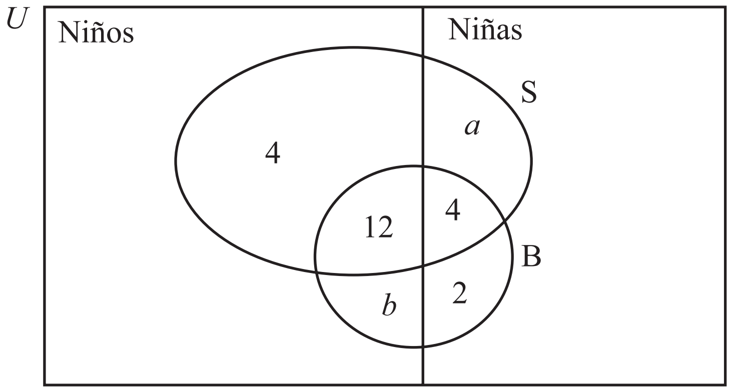
Figura no dibujada a escala

(a) Calcule la longitud de AC. *[3 puntos]*

(b) Calcule la medida del ángulo ACB. *[3 puntos]*

2. *[Puntuación máxima: 12]*

(i) En una clase de 30 estudiantes se pregunta quién sabe nadar (S) y quién sabe montar en bicicleta (B).
En la clase hay 12 niñas. De ellas, 8 saben nadar, 6 saben montar en bicicleta y 4 saben hacer las dos cosas.
De los niños, 16 saben nadar, 13 saben montar en bicicleta y 12 saben hacer las dos cosas.
Esta información viene representada en el siguiente diagrama de Venn.



(a) Halle los valores de a y b. *[2 puntos]*

(b) Calcule el número de estudiantes que no sabe hacer ninguna de las dos cosas. *[2 puntos]*

(c) Escriba la probabilidad de que un estudiante de la clase elegido al azar sepa nadar. *[2 puntos]*

(d) Sabiendo que el estudiante sabe montar en bicicleta, escriba la probabilidad de que sea una niña. *[2 puntos]*

(ii) Considere las siguientes proposiciones lógicas:

$p : x$ es divisor de 6
$q : x$ es divisor de 24

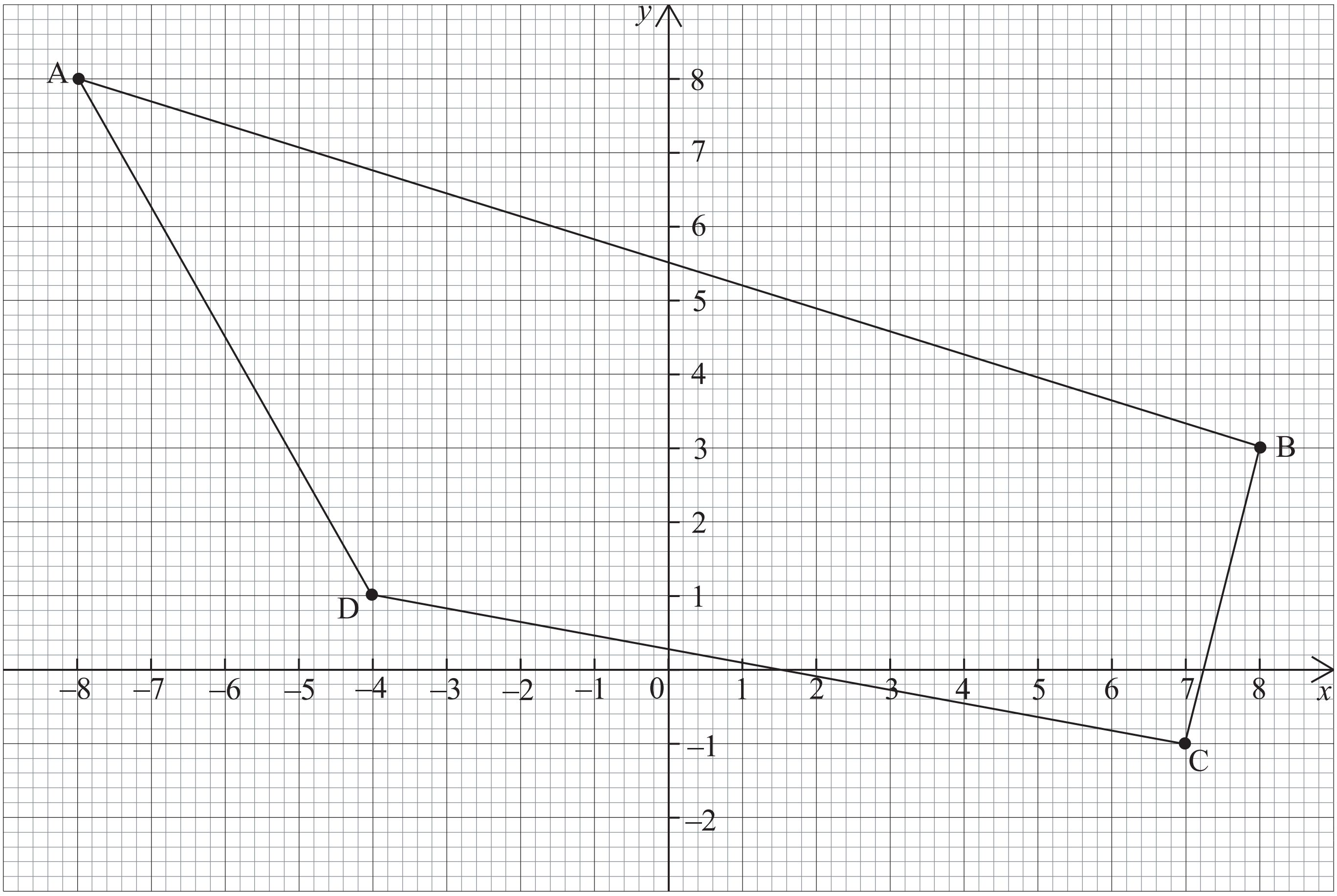
(a) Escriba con palabras $p \Rightarrow q$. *[1 punto]*

(b) Escriba la recíproca de $p \Rightarrow q$. *[1 punto]*

(c) Determine si la recíproca es verdadera o falsa y dé un ejemplo para justificar su respuesta. *[2 puntos]*

3. *[Puntuación máxima: 13]*

Los vértices del cuadrilátero ABCD que aparece en el siguiente diagrama son $A(-8, 8), B(8, 3), C(7, -1)$ y $D(-4, 1)$.



La pendiente de la recta AB es $-\dfrac{5}{16}$.

(a) Calcule la pendiente de la recta DC. *[2 puntos]*

(b) Determine si DC es paralela a AB y justifique su respuesta. *[2 puntos]*

La ecuación de la recta que pasa por los puntos A y C es $3x + 5y = 16$.

(c) Halle la ecuación de la recta que pasa por los puntos B y D, expresando la respuesta en la forma $ax + by = c$, con a, b y $c \in \mathbb{Z}$. *[5 puntos]*

Las rectas AC y BD se cortan en el punto T.

(d) Calcule las coordenadas de T.

[4 puntos]

4. *[Puntuación máxima: 17]*

Ali, Bob y Connie quieren invertir 3 000 USD (dólares de EE UU) cada uno.

Ali invierte sus 3 000 USD en una entidad que ofrece un interés simple del 4,5% anual. El interés se hace efectivo al final de cada año.
Bob invierte sus 3 000 USD en un banco que ofrece un interés compuesto anualmente a una tasa (tipo) del 4% anual. El interés se hace efectivo al final de cada año.
Connie invierte sus 3 000 USD en otro banco que ofrece un interés compuesto semestralmente a una tasa (tipo) del 3,8 % anual. El interés se hace efectivo al final de cada semestre.

(a) Calcule la cantidad de dinero que tendrán Ali y Bob al **principio** del séptimo año. *[6 puntos]*

(b) Compruebe que, al principio del séptimo año, Connie tiene 3 760,20 USD. *[3 puntos]*

(c) Calcule cuántos años le llevará a Bob tener 6 000 USD en el banco. *[3 puntos]*

Al principio del séptimo año, Connie se muda a Inglaterra.
Connie hace una transferencia para pasar su dinero a un banco de allí, a una tasa de cambio de 1 USD = 0,711 GBP (Libras esterlinas).
El banco le carga un 2 % de comisión.

(d) (i) Calcule, en USD, la comisión que le carga el banco.

(ii) Calcule la cantidad de dinero, en GBP, que Connie transfiere al banco de Inglaterra. *[5 puntos]*

5. *[Puntuación máxima: 12]*

Jenny tiene 80 discos y 60 videos para vender.
En total no quiere vender más de 120 artículos.

Sea x el número de discos e y el número de videos que vende.

(a) Sabiendo que $x \geq 0, y \geq 0$ y $x \leq 80$, escriba dos inecuaciones más que representen la información anterior. *[2 puntos]*

(b) Utilizando una escala de 1 cm para cada 10 discos en el eje x y 1 cm para cada 10 videos en el eje y, represente gráficamente este sistema de inecuaciones. *[5 puntos]*

(c) Indique claramente, con R, la región que satisface el sistema de inecuaciones. *[1 punto]*

Jenny obtiene un beneficio de 1,5 USD por cada disco que vende y 2 USD por cada video.

(d) Escriba una ecuación para calcular el beneficio, P, que Jenny puede obtener. *[1 punto]*

(e) Calcule el número de discos y videos que debe vender Jenny para obtener un beneficio máximo. *[2 puntos]*

(f) Escriba ese beneficio máximo. *[1 punto]*

SECCIÓN B

*Conteste **una** pregunta de esta sección.*

Matrices y teoría de grafos

6. *[Puntuación máxima: 30]*

(i) Considere las siguientes matrices:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & 2\end{pmatrix} \quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix} \quad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}6 & -8\\ -3 & 4\end{pmatrix} \quad \boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}2 & -4 & 3\end{pmatrix} \quad \boldsymbol{F}=\begin{pmatrix}5\\ 1\\ 3\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{G}=\begin{pmatrix}3 & 2\\ -4 & 3\end{pmatrix} \quad \boldsymbol{H}=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix} \quad \boldsymbol{I}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

(a) Escriba la letra que representa la matriz identidad. *[1 punto]*

(b) Escriba la letra que representa una matriz fila. *[1 punto]*

(c) Escriba una letra que representa una matriz diagonal. *[1 punto]*

(d) Escriba la letra que representa una matriz singular. *[2 puntos]*

(e) Calcule el determinante de la matriz $\boldsymbol{G}$. *[2 puntos]*

(f) Calcule $\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{D}$. *[2 puntos]*

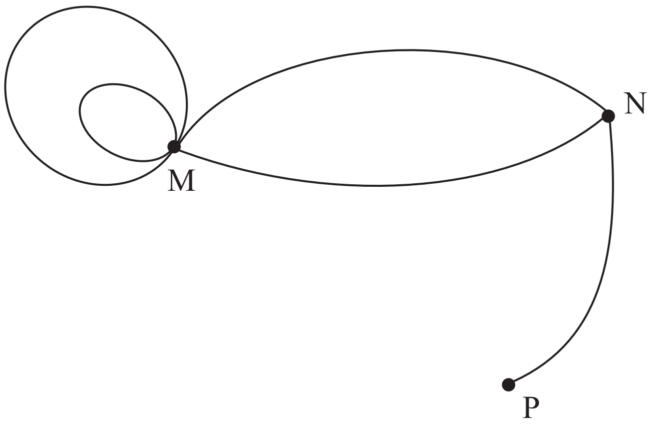
(g) Calcule $\boldsymbol{EF}$. *[2 puntos]*

(h) Escriba la traspuesta de la matriz $\boldsymbol{D}$. *[1 punto]*

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 6: continuación)

(ii) El siguiente diagrama muestra el número de rutas que conectan las tres ciudades M, N y P.



(a) Construya una matriz de adyacencia, $\boldsymbol{T}$, para representar las rutas que conectan las tres ciudades. *[3 puntos]*

(b) Escriba el grado del vértice N. *[1 punto]*

(c) Dibuje un subgrafo del diagrama anterior que conecta las ciudades M, N y P. *[1 punto]*

La matriz $\boldsymbol{T}^2$ se puede escribir en la forma:

$$\boldsymbol{T}^2 = \begin{array}{c} \\ \mathrm{M} \\ \mathrm{N} \\ \mathrm{P} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \mathrm{M} & \mathrm{N} & \mathrm{P} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 20 & 8 & 2 \\ 8 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

(d) ¿Qué representan los elementos de la matriz $\boldsymbol{T}^2$? *[2 puntos]*

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 6: continuación)

(iii) En un colegio con 1 000 alumnos, se ha utilizado un modelo matemático para estudiar el patrón que sigue el número de alumnos ausentes (A) y presentes (P).

Cada lunes se tomó nota del número de alumnos ausentes. Se encontró el siguiente patrón:

El 81 % de los alumnos ausentes un lunes determinado estaban presentes el lunes siguiente.

El 7 % de los alumnos presentes un lunes determinado estaban ausentes el lunes siguiente.

(a) Copie y complete la matriz de transición que representa la información anterior.

$$\text{Lunes siguiente} \quad \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} & \text{Lunes} \\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{P} \end{array} \\ \begin{array}{c} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{P} \end{array} & \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ 0{,}81 & \quad \end{pmatrix} \end{array}$$

[3 puntos]

El lunes 12 de julio había 100 alumnos ausentes y 900 presentes.

(b) Calcule el número de alumnos ausentes el lunes siguiente. *[2 puntos]*

Los registros muestran que 250 alumnos estuvieron ausentes y 750 estuvieron presentes el lunes 5 de julio.

(c) Compruebe, mostrando claramente las operaciones, si esta información es verdadera o falsa. *[2 puntos]*

(iv) Tom y Jerry juegan un juego de suma nula de 2 personas. La matriz siguiente, $\boldsymbol{J}$, muestra las ganancias de Jerry.

$$\boldsymbol{J} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} t_1 & t_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} j_1 \\ j_2 \end{array} & \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \end{array}$$

(a) ¿Cuál es la estrategia de juego segura para Jerry? *[1 punto]*

(b) ¿Cuál es la estrategia de juego segura para Tom? *[1 punto]*

(c) ¿Cuál es el resultado para Tom y para Jerry si cada uno de ellos juega su estrategia segura? *[2 puntos]*

Extensión de estadística y probabilidad

7. *[Puntuación máxima: 30]*

(i) En una competición participan 300 nadadores. Los participantes con los 60 mejores tiempos pasan a las semifinales.

(a) Calcule el porcentaje que pasa a las semifinales. *[1 punto]*

Los tiempos siguen aproximadamente una distribución normal de media 204 segundos y desviación típica 6 segundos.

(b) Represente esta información en una gráfica de distribución normal, indicando claramente la media y el porcentaje que alcanza las semifinales. *[3 puntos]*

(c) Calcule el tiempo del participante más lento que pasa a las semifinales. *[4 puntos]*

(ii) En la siguiente tabla aparecen los valores observados del número de hombres y mujeres que toman parte en distintas pruebas de natación de otra competición.

	Espalda (100m)	Estilo libre (100m)	Mariposa (100m)	Braza (100m)	Relevos (4×100m)
Hombres	30	90	31	29	20
Mujeres	28	63	20	37	12

El comité de natación decide realizar una prueba de χ^2 a un nivel de significación del 5 % para ver si el número de entradas de los distintos estilos está relacionada con el género.

(a) Enuncie la hipótesis nula. *[1 punto]*

(b) Escriba el número de grados de libertad. *[1 punto]*

(c) Escriba el valor crítico de χ^2. *[1 punto]*

Los valores esperados vienen dados en la siguiente tabla:

	Espalda (100m)	Estilo libre (100m)	Mariposa (100m)	Braza (100m)	Relevos (4×100m)
Hombres	32	a	28	37	18
Mujeres	26	68	23	b	14

(d) Calcule los valores de a y b. *[2 puntos]*

(e) Calcule el valor de χ^2. *[3 puntos]*

(f) Determine si se acepta o no la hipótesis nula y justifique su respuesta. *[2 puntos]*

Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 7: continuación)

(iii) Se cree que el tiempo de los 200 m braza depende de la longitud del brazo del nadador.
Un grupo de ocho alumnos nada los 200 m braza. En la siguiente tabla se muestran sus tiempos (y) en segundos y la longitud de sus brazos (x) en cm.

	1	2	3	4	5	6	7	8
Longitud del brazo, x cm	79	74	72	70	77	73	64	69
Braza, y segundos	135,1	135,7	139,3	141,0	132,8	137,0	152,9	144,0

(a) Calcule la media y la desviación típica de x e y. *[4 puntos]*

(b) Sabiendo que $s_{xy} = -24{,}82$, calcule el coeficiente de correlación, r. *[2 puntos]*

(c) Comente el valor de r obtenido. *[2 puntos]*

(d) Calcule la ecuación de la recta de regresión de y sobre x. *[3 puntos]*

(e) Utilizando la recta de regresión hallada, estime cuántos segundos tardará un alumno cuyo brazo tiene una longitud de 75 cm en hacer los 200 m braza. *[1 punto]*

Introducción al cálculo diferencial

8. *[Puntuación máxima: 30]*

(i) Considere la función $f(x) = x^3 + 7x^2 - 5x + 4$.

(a) Derive $f(x)$ respecto a x. *[3 puntos]*

(b) Calcule $f'(x)$ cuando $x = 1$. *[2 puntos]*

(c) Calcule los valores de x cuando $f'(x) = 0$. *[3 puntos]*

(d) Calcule las coordenadas de los puntos máximo y mínimo locales. *[2 puntos]*

(e) Dibuje la gráfica de $f(x)$ en papel milimetrado, tomando en los ejes $-6 \le x \le 3$ and $0 \le y \le 80$, e indique claramente el máximo local, el mínimo local y el corte con el eje y. *[4 puntos]*

(ii) Se lanza un objeto verticalmente hacia arriba desde un punto O en el suelo.

La altura, h, del objeto a los t segundos viene dada por la ecuación

$$h = 25t - 5t^2$$

(a) Calcule la altura a los 2 segundos. *[2 puntos]*

(b) Halle una expresión en función de t para la velocidad, v, del objeto. *[2 puntos]*

(c) Calcule la velocidad inicial. *[2 puntos]*

(d) Calcule el instante en que la velocidad es cero. *[2 puntos]*

(e) Calcule la altura alcanzada por el objeto en el instante en que la velocidad es cero. *[2 puntos]*

(iii) Una curva pasa por el punto de coordenadas (2, 3).
La pendiente de la tangente a la curva viene dada por la expresión

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 2x - 1.$$

Calcule la ecuación de la curva. *[6 puntos]*