IB DIPLOMA PROGRAMME
PROGRAMME DU DIPLÔME DU BI
PROGRAMA DEL DIPLOMA DEL BI

M05/5/MATME/SP2/SPA/TZ0/XX

22057310

MÉTODOS MATEMÁTICOS
NIVEL MEDIO
PRUEBA 2

Miércoles 4 de mayo de 2005 (mañana)

2 horas

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste las cinco preguntas de la Sección A y una pregunta de la Sección B.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o con tres cifras significativas.

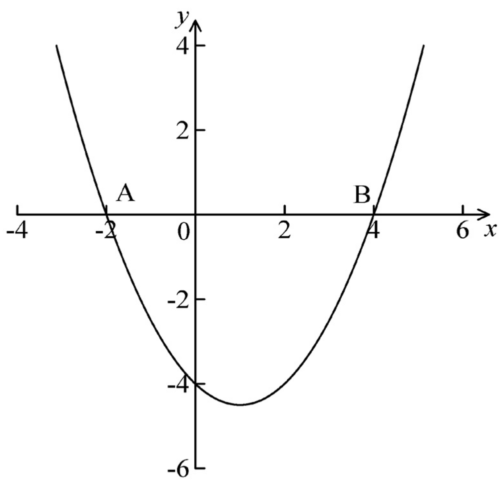
Empiece una página nueva para cada respuesta. Se recomienda que muestre todos los cálculos, siempre que sea posible. Cuando la respuesta sea incorrecta se otorgarán algunos puntos siempre que aparezca el método empleado y éste sea correcto. Para los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el proceso seguido hasta su obtención. Por ejemplo, cuando deba utilizar gráficas de una calculadora de pantalla gráfica para hallar soluciones, deberá dibujar esas gráficas en su respuesta.

SECCIÓN A

*Conteste las **cinco** preguntas de esta sección*

1. *[Puntuación máxima: 15]*

La ecuación de una curva se puede escribir en la forma $y = a(x-p)(x-q)$. La curva corta al eje x en A(–2, 0) y en B(4, 0). En la siguiente figura se muestra la curva de $y = f(x)$.



(a) (i) Escriba el valor de p y de q.

(ii) Sabiendo que (6, 8) es un punto de la curva, halle el valor de a.

(iii) Escriba la ecuación de la curva en la forma $y = ax^2 + bx + c$. *[5 puntos]*

(b) (i) Halle $\frac{dy}{dx}$.

(ii) Se traza la tangente a la curva en un punto P. La pendiente de esta tangente es 7. Halle las coordenadas de P. *[4 puntos]*

(c) La recta L es perpendicular en el punto B(4, 0) a la tangente a la curva en B.

(i) Halle la ecuación de L.

(ii) Halle la abscisa, x, del punto donde L corta de nuevo a la curva. *[6 puntos]*

2. *[Puntuación máxima: 12]*

La siguiente tabla muestra las asignaturas que estudian 210 alumnos en una universidad.

	1er curso	2º curso	Totales
Historia	50	35	85
Ciencias	15	30	45
Arte	45	35	80
Totales	110	100	210

(a) Se selecciona al azar un alumno de la universidad.
Sea A el suceso el alumno estudia Arte.
Sea B el suceso el alumno está en 2º curso.

(i) Halle $\mathrm{P}(A)$.

(ii) Halle la probabilidad de que el alumno sea un alumno de arte de 2º curso.

(iii) ¿Los sucesos A y B son independientes? Justifique su respuesta. *[6 puntos]*

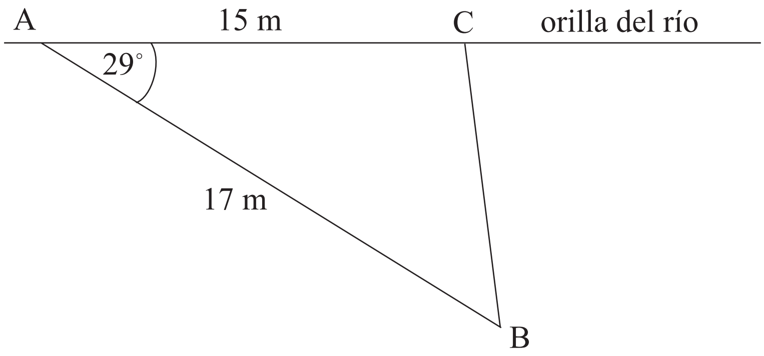
(b) Suponiendo que se selecciona al azar un alumno de historia, calcule la probabilidad de que el alumno esté en 1er curso. *[2 puntos]*

(c) Se seleccionan al azar dos alumnos de la universidad. Calcule la probabilidad de que uno de ellos esté en 1er curso, y el otro en 2º curso. *[4 puntos]*

3. *[Puntuación máxima: 14]*

La siguiente figura muestra una región triangular formada por un seto [AB], parte de la orilla de un río [AC] y una cerca [BC]. El seto tiene 17 m de largo y $\mathrm{B\hat{A}C}$ mide 29°. El final de la cerca, el punto C, se puede situar en cualquier lugar a lo largo de la orilla del río.

(a) Suponiendo que el punto C está a 15 m de A, halle la longitud de la cerca [BC]. *[3 puntos]*



(b) El granjero tiene otra cerca más larga. Con ella se podrían formar dos regiones triangulares distintas. El granjero coloca la cerca de modo que $\mathrm{A\hat{B}C}$ mide 85°.

(i) Halle la distancia entre A y C.

(ii) Halle el área de la región ABC con la cerca situada en esa posición. *[5 puntos]*

(c) Para formar la segunda región, el granjero mueve la cerca de modo que el punto C esté más próximo al punto A. Halle la distancia que existe ahora entre A y C. *[4 puntos]*

(d) Halle la longitud mínima que ha de tener la cerca [BC] para encerrar una región triangular ABC. *[2 puntos]*

4. *[Puntuación máxima: 12]*

Sea $f(x) = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x + \cos x$, para $0 \le x \le 2\pi$.

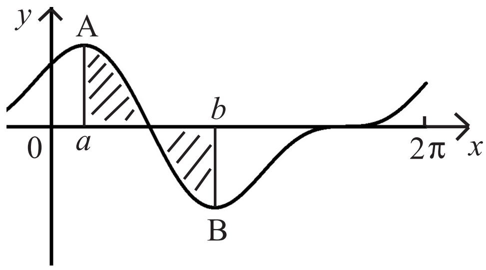
(a) (i) Halle $f'(x)$.

Una forma de escribir $f'(x)$ es $-2\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x + 1$.

(ii) Factorice $2\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 1$.

(iii) A partir de lo anterior, o de cualquier otro modo, resuelva $f'(x) = 0$. *[6 puntos]*

A continuación se muestra la gráfica de $y = f(x)$.



Existe un máximo en el punto A y un mínimo en el punto B.

(b) Escriba la abscisa, *x*, del punto A. *[1 punto]*

(c) La región encerrada por la gráfica, el eje *x* y las rectas $x = a$ y $x = b$ aparece sombreada en la figura anterior.

(i) Escriba una expresión que represente el área de esta región sombreada.

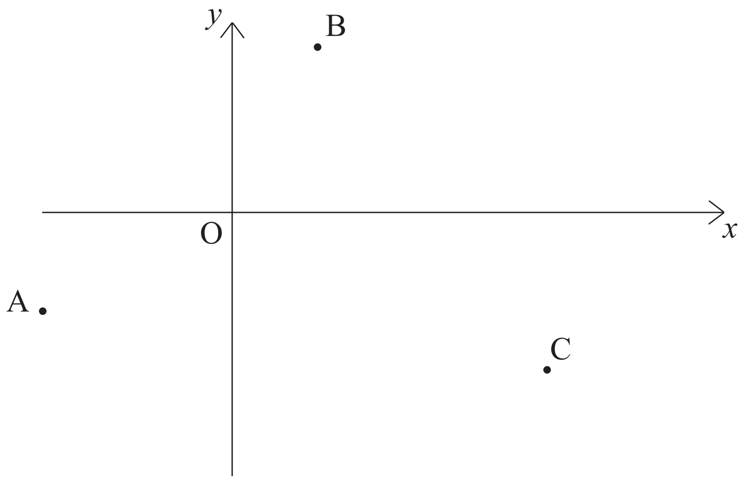
(ii) Calcule el área de esta región sombreada. *[5 puntos]*

5. *[Puntuación máxima: 17]*

En esta pregunta el vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ representa un desplazamiento de 1 km hacia el este,

y el vector $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ representa un desplazamiento de 1 km hacia el norte.

La siguiente figura muestra la posición de las ciudades A, B y C respecto a un aeropuerto O, situado en el punto (0, 0). Un avión vuela sobre las tres ciudades a una velocidad constante de $250\ \text{km h}^{-1}$.



La ciudad A se encuentra a 600 km al oeste y 200 km al sur del aeropuerto.
La ciudad B se encuentra a 200 km al este y 400 km al norte del aeropuerto.
La ciudad C se encuentra a 1 200 km al este y 350 km al sur del aeropuerto.

(a) (i) Halle $\overrightarrow{\text{AB}}$.

(ii) Compruebe que el vector de longitud una unidad en la dirección de $\overrightarrow{\text{AB}}$ es $\begin{pmatrix} 0{,}8 \\ 0{,}6 \end{pmatrix}$. *[4 puntos]*

A las 12:00 h, un avión sobrevuela la ciudad A dirigiéndose hacia la ciudad B a una velocidad de $250\ \text{km h}^{-1}$.

Sea $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ el vector velocidad del avión. Sea t el número de horas que permanece volando a partir de las 12:00 h. La posición del avión puede venir dada por la ecuación vectorial

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -600 \\ -200 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}.$$

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 5: continuación)

(b) (i) Compruebe que el vector velocidad es $\begin{pmatrix} 200 \\ 150 \end{pmatrix}$.

(ii) Halle la posición del avión a las 13:00 h.

(iii) ¿A qué hora sobrevolará el avión la ciudad B? *[6 puntos]*

Cuando sobrevuela la ciudad B, el avión cambia su dirección para volar hacia la ciudad C. Recorrer los $1\,250$ km entre B y C le lleva cinco horas. Al sobrevolar la ciudad A, el piloto observó que le quedaban $17\,000$ litros de combustible. El avión consume 1800 litros de combustible por hora cuando viaja a 250 km h^{-1}. Cuando el combustible del depósito desciende por debajo de los $1\,000$ litros, se enciende una señal luminosa.

(c) ¿A qué distancia de la ciudad C se encontrará el avión cuando se encienda la señal luminosa? *[7 puntos]*

SECCIÓN B

*Conteste **una** pregunta de esta sección.*

Métodos estadísticos

6. *[Puntuación máxima: 30]*

(i) El número de horas de estudio que un alumno dedica a preparar un determinado examen es x. El alumno obtiene y puntos sobre un total de 100. Se registran los pares de valores (x, y) de los alumnos de una clase y se investiga la relación entre x e y. Los resultados se resumen en la siguiente tabla.

	x	y
Media	10	60
Desviación típica	3	15

La covarianza de x e y es igual a 36.

(a) Halle la ecuación de la recta de regresión de mínimos cuadrados de y sobre x, expresando la respuesta en la forma $y = mx + c$. *[4 puntos]*

(b) (i) Utilice su respuesta al apartado (a) para predecir cuántos puntos obtendrá un alumno que estudia durante 20 horas.

(ii) Un profesor intenta explicar a los alumnos que estudiando el número de horas calculado en el apartado (b) (i) no tienen garantizados los 100 puntos. Para ello utiliza el valor del coeficiente de correlación momento-producto, r.

(a) Calcule r para los datos ofrecidos.

(b) Considerando el valor de r obtenido, ¿qué fiabilidad tiene la predicción del apartado (b) (i)? *[7 puntos]*

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 6: continuación)

(ii) Los ahorros de los residentes de una pequeña población están normalmente distribuidos con una media de $\$\,3\,000$ y una desviación típica de \$ 500.

(a) (i) ¿Qué porcentaje de vecinos tiene ahorros mayores de $\$\,3\,200$?

(ii) Se eligen dos vecinos al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que **los dos** tengan ahorros con valores entre los $\$\,2\,300$ y los $\$\,3\,300$?

(iii) El porcentaje de vecinos cuyos ahorros son menores de d dólares es del 74,22 %. Halle el valor de d. *[8 puntos]*

(b) El periódico local afirma que el ahorro medio es menor de $\$\,3\,000$. Para comprobar esta afirmación toman una muestra aleatoria de 100 vecinos y hallan que la media de esta muestra es $\$\,2\,950$.

(i) Establezca la hipótesis nula y la hipótesis alternativa.

(ii) Compruebe que no existe evidencia suficiente para aceptar la afirmación del periódico con un nivel de significación del 5 %.

(iii) Utilice la anterior muestra aleatoria de 100 vecinos para calcular un intervalo de confianza del 99 % para la media de los ahorros. *[11 puntos]*

Extensión de análisis

7. *[Puntuación máxima: 30]*

(i) Sea $f(x) = \dfrac{3x^2}{5x-1}$.

(a) Escriba la **ecuación** de la asíntota vertical de $y = f(x)$. *[1 punto]*

(b) Halle $f'(x)$. Exprese su respuesta en la forma $\dfrac{ax^2+bx}{(5x-1)^2}$, con a y $b \in \mathbb{Z}$. *[4 puntos]*

(ii) La función $g(x)$ está definida para $-3 \le x \le 3$. El comportamiento de $g'(x)$ y de $g''(x)$ viene dado en las siguientes tablas.

x	$-3 < x < -2$	-2	$-2 < x < 1$	1	$1 < x < 3$
$g'(x)$	negativa	0	positiva	0	negativa

x	$-3 < x < -\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} < x < 3$
$g''(x)$	positiva	0	negativa

Utilice esta información para contestar lo siguiente. Justifique su respuesta en cada caso.

(a) Escriba el valor de x para el cual g tiene un máximo. *[2 puntos]*

(b) ¿En qué intervalos es g decreciente? *[2 puntos]*

(c) Escriba el valor de x para el cual la gráfica de g tiene un punto de inflexión. *[2 puntos]*

(d) Sabiendo que $g(-3) = 1$, dibuje aproximadamente la gráfica de g. Sobre ella, indique claramente la posición del máximo, del mínimo y del punto de inflexión. *[3 puntos]*

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

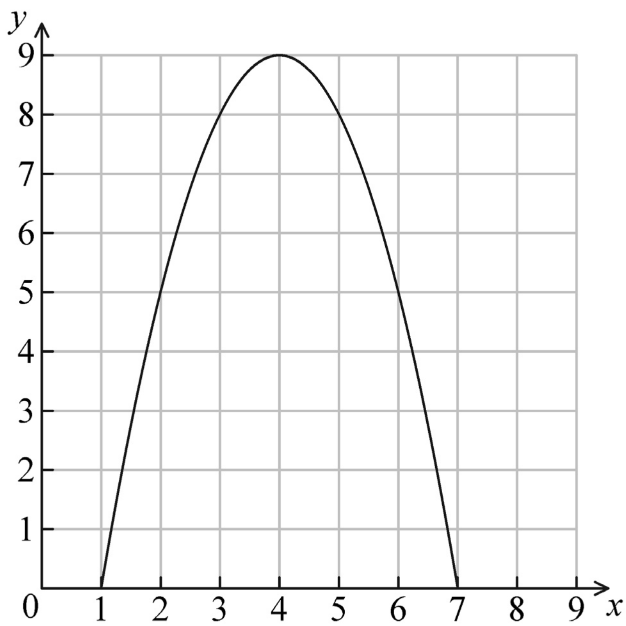
(Pregunta 7: continuación)

(iii) (a) Utilizando la sustitución $u = x^2 + 1$, o de cualquier otro modo, halle $\int 6x\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x$. *[4 puntos]*

(b) Calcule $\int_0^{\sqrt{3}} 6x\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x$. *[2 puntos]*

(c) Sea $\int_0^{\sqrt{3}} 6x\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^{k} (2x+5)\,\mathrm{d}x$. Halle los dos posibles valores de *k*. *[4 puntos]*

(iv) La gráfica de $h(x) = -(x-1)(x-7) = -x^2 + 8x - 7$ viene dada en la siguiente figura. Se usa la regla del trapecio para estimar el valor de $\int_2^4 (-x^2 + 8x - 7)\,\mathrm{d}x$.



(a) (i) Dibuje aproximadamente esta gráfica en el cuadernillo de respuestas.
Sobre la gráfica, dibuje los **cuatro** trapecios que se usan para estimar $\int_2^4 (-x^2 + 8x - 7)\,\mathrm{d}x$.

(ii) Use la regla del trapecio para estimar $\int_2^4 (-x^2 + 8x - 7)\,\mathrm{d}x$. *[5 puntos]*

(b) Explique por qué la respuesta al apartado (a) (ii) nos da un valor menor que el del área bajo la curva entre $x = 2$ y $x = 4$. *[1 punto]*

Extensión de geometría

8. *[Puntuación máxima: 30]*

(i) Sean $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & a \end{pmatrix}$.

La matriz de orden 2×2 $\boldsymbol{Q}$ es tal que $3\boldsymbol{Q} = 2\boldsymbol{C} - \boldsymbol{D}$.

(a) Halle $\boldsymbol{Q}$. *[3 puntos]*

(b) Halle $\boldsymbol{CD}$. *[4 puntos]*

(c) Halle $\boldsymbol{D}^{-1}$. *[2 puntos]*

(ii) (a) Halle las matrices que representan las siguientes transformaciones.

(i) La homotecia $\boldsymbol{E}$ tal que $\boldsymbol{E}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \end{pmatrix}$.

(ii) La rotación $\boldsymbol{R}$ tal que $\boldsymbol{R}\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(iii) La cizalladura $\boldsymbol{H}$ en la dirección del eje x tal que $\boldsymbol{H}\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 5 \end{pmatrix}$. *[9 puntos]*

(b) Explique por qué la transformación $\boldsymbol{H}$ tiene inversa. *[1 punto]*

(iii) (a) Sean $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ vectores 2×1 no nulos. Sea $\boldsymbol{M}$ una transformación tal que las imágenes de $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ y $(2\boldsymbol{v} - 5\boldsymbol{w})$ mediante $\boldsymbol{M}$ son $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{v}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{w}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{M}(2\boldsymbol{v} - 5\boldsymbol{w}) = \begin{pmatrix} 9 \\ h \end{pmatrix}$. Halle h. *[2 puntos]*

(b) Sea $\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Halle la imagen mediante $\boldsymbol{T}$ de la recta $y = 2x + 1$. *[3 puntos]*

(c) Sea $\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

(i) Halle la matriz de la transformación $\boldsymbol{W}$ tal que $\boldsymbol{TW} = \boldsymbol{S}$.

(ii) Sea A' la imagen mediante $\boldsymbol{S}$ del cuadrado A de vértices en (0, 0), (0, 1), (1, 1) y (1, 0). Calcule el área de A'. *[6 puntos]*