IB DIPLOMA PROGRAMME
PROGRAMME DU DIPLÔME DU BI
PROGRAMA DEL DIPLOMA DEL BI

N04/5/MATSD/SP2/SPA/TZ0/XX

88047310

ESTUDIOS MATEMÁTICOS
NIVEL MEDIO
PRUEBA 2

Jueves 4 de noviembre de 2004 (mañana)

2 horas

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste las cinco preguntas de la Sección A y una pregunta de la Sección B.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o con tres cifras significativas.
- Indique la marca y el modelo de su calculadora en el cuadro correspondiente de la portada del examen.

Empiece una página nueva para cada respuesta. Se recomienda que muestre todos los cálculos, siempre que sea posible. Cuando la respuesta sea incorrecta se otorgarán algunos puntos siempre que aparezca el método empleado y éste sea correcto. Para los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el proceso seguido hasta su obtención. Por ejemplo, cuando deba utilizar gráficas de una calculadora de pantalla gráfica para hallar soluciones, deberá dibujar esas gráficas en su respuesta.

SECCIÓN A

Conteste las ***cinco*** *preguntas de esta sección.*

1. *[Puntuación máxima: 14]*

La banda de jazz de un colegio tiene tres instrumentos musicales distintos – saxofón (S), clarinete (C) y batería (D). Los alumnos de la banda saben tocar uno, dos o tres de esos instrumentos.
En una clase de 40 alumnos de BI, 25 pertenecen a la banda de jazz. De esos 25

3 saben tocar los tres instrumentos
5 saben tocar **sólo** el saxofón y el clarinete
5 saben tocar **al menos** el clarinete y la batería
7 saben tocar **al menos** el saxofón y la batería
16 saben tocar el saxofón
12 saben tocar el clarinete.

(a) Dibuje un diagrama de Venn indicando claramente el número de elementos en cada región. *[5 puntos]*

(b) Compruebe que son 5 los alumnos que **sólo** saben tocar la batería. *[2 puntos]*

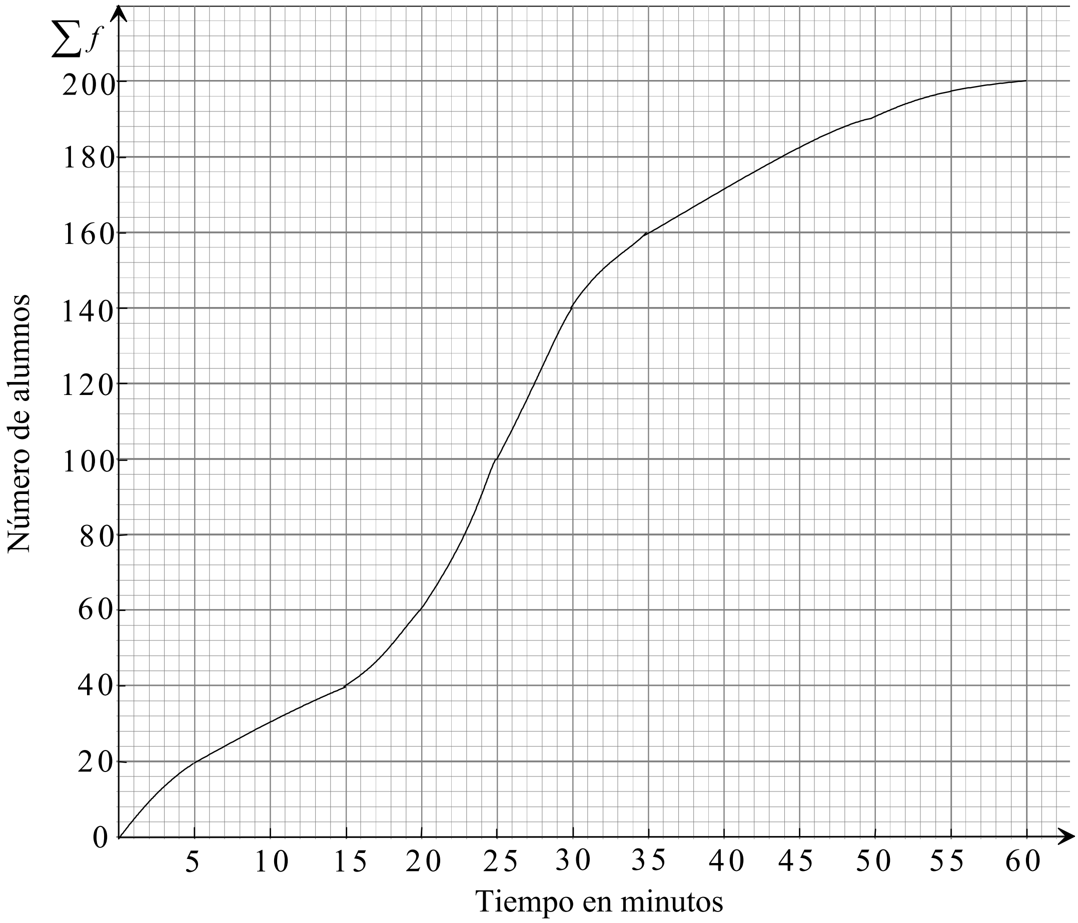
(c) Halle la probabilidad de que un alumno elegido al azar de la clase de BI sepa tocar sólo el saxofón. *[2 puntos]*

(d) Halle la probabilidad de que un alumno elegido al azar de la clase de BI sepa tocar el clarinete, o la batería, o ambos. *[2 puntos]*

(e) Suponiendo que un alumno sabe tocar el saxofón, halle la probabilidad de que también sepa tocar el clarinete. *[3 puntos]*

2. *[Puntuación máxima: 11]*

Se ha dibujado la gráfica de frecuencias acumuladas a partir de una tabla de frecuencias que muestra el tiempo que invierte un número de alumnos en finalizar un juego de computadora/ordenador.



(a) A partir de la gráfica halle

(i) el tiempo que representa la mediana;

(ii) el rango intercuartil. *[5 puntos]*

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 2: continuación)

La gráfica se ha dibujado a partir de los datos que se muestran en la siguiente tabla.

Tiempo en minutos	**Número de alumnos**
$0 < x \leq 5$	20
$5 < x \leq 15$	20
$15 < x \leq 20$	p
$20 < x \leq 25$	40
$25 < x \leq 35$	60
$35 < x \leq 50$	q
$50 < x \leq 60$	10

(b) Utilizando la gráfica, halle los valores de p y q. *[2 puntos]*

(c) Halle una estimación del tiempo medio invertido para finalizar el juego de computadora/ordenador. *[4 puntos]*

3. *[Puntuación máxima: 17]*

Dos funciones están definidas del siguiente modo

$$f(x) = \begin{cases} 6 - x & \text{para } 0 \le x < 6 \\ x - 6 & \text{para } x \ge 6 \end{cases}$$

$$g(x) = \frac{1}{2}x \, .$$

(a) Dibuje las gráficas de las funciones f y g en el intervalo $0 \le x \le 14$, $0 \le y \le 8$, utilizando una escala de 1 cm para representar 1 unidad en cada eje. *[5 puntos]*

(b) (i) Marque sobre la gráfica los puntos A y B de intersección de las funciones $f(x)$ y $g(x)$.

(ii) Escriba las coordenadas de A y B. *[3 puntos]*

(c) (i) Si N es el punto donde $f(x)$ corta al eje x, escriba las coordenadas de N.

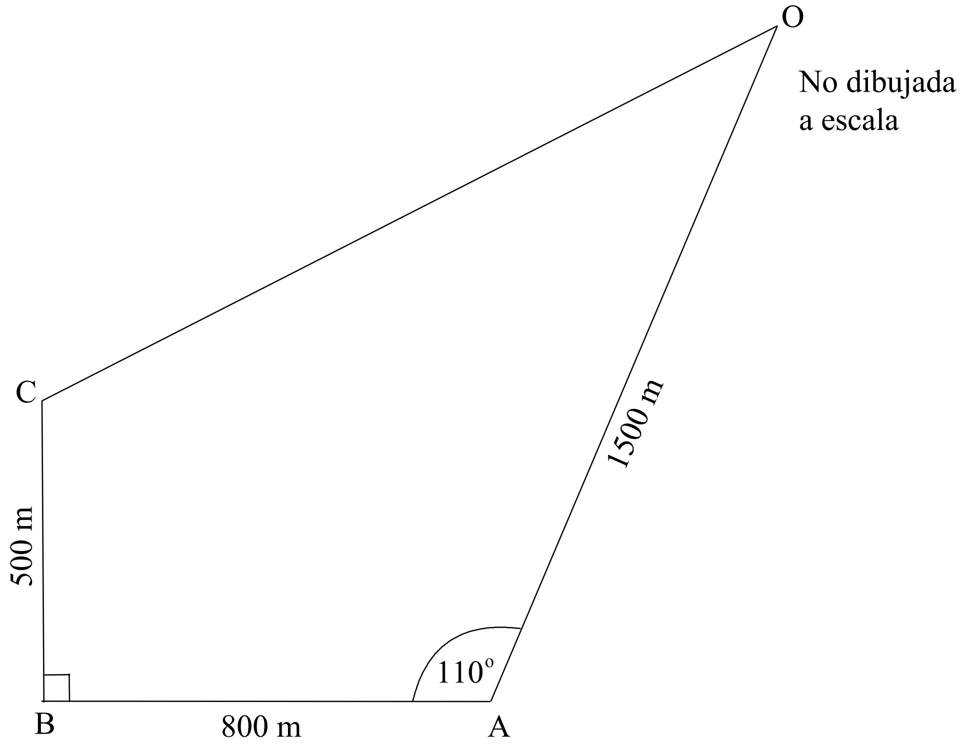
(ii) Compruebe que el ángulo ANB es un ángulo recto. *[3 puntos]*

(d) Calcule el punto medio M de la recta AB. *[2 puntos]*

(e) Halle la ecuación de la recta que une los puntos M y N. *[4 puntos]*

4. *[Puntuación máxima: 16]*

El siguiente diagrama muestra el recorrido de una carrera. La salida y la llegada de los corredores se encuentran en el punto O.



(a) Compruebe que la distancia CA es, aproximada a 3c.f., 943 m. *[2 puntos]*

(b) Compruebe que el ángulo BCA es, aproximada a 3c.f., $58{,}0^\circ$. *[2 puntos]*

(c) (i) Calcule el ángulo CAO.

(ii) Calcule la distancia CO. *[5 puntos]*

(d) Calcule el área encerrada por el recorrido OABC. *[4 puntos]*

(e) González corre a una velocidad de $4\ \text{m s}^{-1}$. Calcule el tiempo, en minutos, que invierte en realizar el recorrido. *[3 puntos]*

5. *[Puntuación máxima: 12]*

Una pequeña empresa fabrica dos modelos de teléfonos móviles, el *Speakeasy* y el *Cleartalk*.

Se necesitan seis horas para fabricar un *Speakeasy*, y diez horas para fabricar un *Cleartalk*. Se dispone de un total de 900 horas semanales para fabricar los dos modelos.

Sea x el número de teléfonos móviles del modelo *Speakeasy* que se fabrican por semana y sea y el número de teléfonos móviles del modelo *Cleartalk* que se fabrican por semana.

(a) Compruebe que la inecuación $3x + 5y \leq 450$ representa la información anterior. *[1 punto]*

Debido a las diferencias entre las demandas de ambos modelos, los costos de marketing son de \$ 20 por unidad del *Speakeasy* y de \$ 10 por unidad del *Cleartalk*. La empresa puede gastar hasta un total de \$ 1600 semanales en marketing.

(b) Escriba una segunda inecuación que refleje esta información. *[1 punto]*

(c) Dibuje una gráfica que represente estas dos inecuaciones, tomando 1 cm para representar 10 unidades en cada eje. *[5 puntos]*

(d) Dado que $x \geq 0$ e $y \geq 0$, indique claramente, sombreándola, la región representada por las cuatro inecuaciones. *[1 punto]*

El beneficio obtenido por cada *Speakeasy* es de \$ 20 y por cada *Cleartalk* de \$ 30.

(e) Escriba una ecuación para el beneficio semanal, P. *[1 punto]*

(f) Halle el beneficio máximo y el número de unidades de cada modelo que proporciona este beneficio. *[3 puntos]*

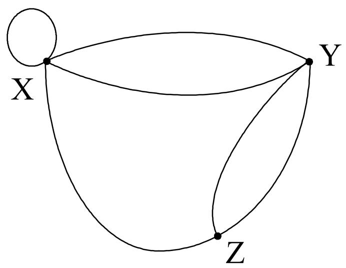
SECCIÓN B

*Conteste **una** pregunta de esta sección.*

Matrices y teoría de grafos

6. *[Puntuación máxima: 30]*

(i) A continuación se muestra el grafo de una carretera que comunica los pueblos X, Y y Z.



(a) Escriba el número de vértices que aparecen en el grafo. *[1 punto]*

(b) Escriba el número de aristas que aparecen en el grafo. *[1 punto]*

(c) Determine el grado de cada vértice. *[3 puntos]*

(ii) Dada la siguiente matriz de adyacencia para las carreteras entre las ciudades A, B, C y D, dibuje un grafo dirigido (dígrafo) que represente estas carreteras.

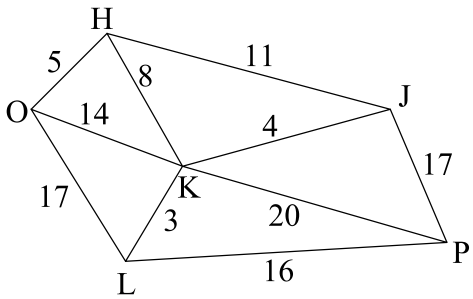
$$\text{desde}\quad \begin{array}{c} \\ \text{A} \\ \text{B} \\ \text{C} \\ \text{D} \end{array} \begin{array}{c} \text{hacia} \\ \begin{array}{cccc} \text{A} & \text{B} & \text{C} & \text{D} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

[4 puntos]

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 6: continuación)

(iii) Dado el siguiente grafo que muestra las distancias entre las ciudades O, H, J, K, L y P, calcule la distancia más corta entre O y P, suponiendo que la carretera debe pasar por H y K. (También puede pasar por otras ciudades).



[2 puntos]

(iv) Para ir todos los días a trabajar, una persona lleva su coche (d) o toma el tren (t). Nunca toma el tren dos días seguidos. Si lleva el coche, entonces la probabilidad de que al día siguiente tome el tren es la misma que la de que lleve el coche.

La matriz de transición de la información anterior es la siguiente.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} t & d \end{array} \\ \begin{array}{c} t \\ d \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} \end{array}$$

(a) Explique por qué existe un 1 en la fila correspondiente a t. *[1 punto]*

(b) Calcule los valores de a y b. *[2 puntos]*

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 6: continuación)

(v) Cuatro equipos, Alpha, Beta, Gamma y Delta, juegan un torneo de fútbol. Si un equipo gana obtiene 3 puntos, si empata obtiene 1 punto y si pierde obtiene 0 puntos.

(a) Escriba una matriz columna de orden 3 por 1 que indique los posibles puntos que obtiene cada equipo por partido. *[1 punto]*

(b) La siguiente matriz muestra el resultado de los partidos.

$$\begin{array}{l} \\ \text{Alpha} \\ \text{Beta} \\ \text{Gamma} \\ \text{Delta} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Gana} & \text{Empata} & \text{Pierde} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

(i) Escriba las dos matrices que se han de multiplicar para hallar el número total de puntos que ha obtenido cada equipo. *[2 puntos]*

(ii) **A partir de lo anterior** calcule el número total de puntos que ha obtenido cada equipo. *[2 puntos]*

(vi) Sea $\boldsymbol{A}$ la matriz $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

(a) Escriba la matriz traspuesta de la matriz $\boldsymbol{A}$. *[1 punto]*

(b) Calcule $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$. *[4 puntos]*

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 6: continuación)

(vii) Dos jugadores, Stephen y Jane, toman parte en un juego. Cada uno de ellos, por separado, elige +1 ó –1. Cuando se muestra lo que han elegido, Stephen paga a Jane la suma de los números seleccionados. A continuación aparecen los posibles resultados (la matriz de pagos de Jane).

$$\begin{array}{cc} & \text{Stephen} \\ & \begin{array}{cc} 1 & -1 \end{array} \\ \text{Jane} \begin{array}{r} 1 \\ -1 \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \end{array}$$

(a) ¿Cuál es la estrategia segura para el juego de Jane? *[1 punto]*

(b) ¿Cuál es la estrategia segura para el juego de Stephen? *[1 punto]*

(c) En el caso de que ambos elijan jugar la estrategia segura, ¿cuánto gana cada uno? *[1 punto]*

(d) Si Stephen cree que Jane va a jugar su estrategia óptima, ¿qué debe jugar él? *[1 punto]*

(e) ¿Es justo este juego? Justifique su respuesta. *[2 puntos]*

Extensión de estadística y probabilidad

7. *[Puntuación máxima: 30]*

(i) La siguiente tabla de resultados observados muestra el número de alumnos que realiza un examen de matemáticas, clasificados por sexo y nivel obtenido.

Nivel

		5, 6 ó 7	3 ó 4	1 ó 2	Total
	Hombres	5000	3400	600	9000
Sexo	Mujeres	6000	4000	1000	11000
	Total	11000	7400	1600	20000

La pregunta que se plantea es determinar si el sexo y el nivel obtenido son independientes o no.

(a) **Compruebe claramente** que el número esperado de hombres que alcanzan el nivel 5, 6 ó 7 es 4950. *[2 puntos]*

(b) Se lleva a cabo la prueba de χ^2.

(i) Establezca la hipótesis nula. *[1 punto]*

(ii) Determine el número de grados de libertad. *[1 punto]*

(iii) El valor calculado de χ^2 al nivel del 5 % es 39,957. Indique el valor crítico de χ^2 al nivel de significación del 5 %. *[1 punto]*

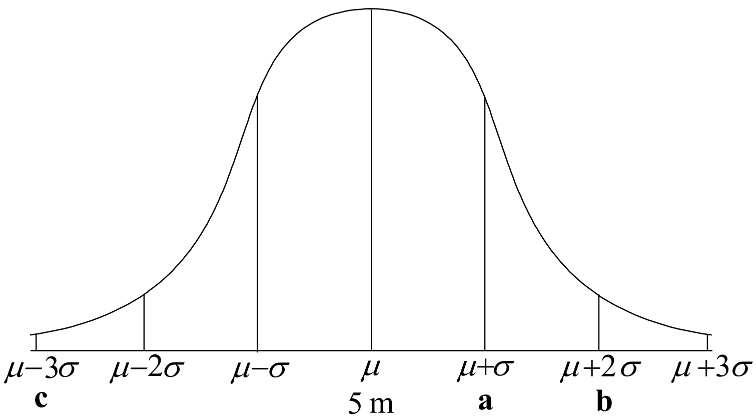
(iv) ¿Qué se puede afirmar respecto al sexo y el nivel obtenido? *[1 punto]*

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 7: continuación)

(ii) Un fabricante produce palos de madera de una longitud media de 5 m. Las longitudes están normalmente distribuidas con una desviación típica de 10 cm.

(a) Calcule los valores de **a**, **b** y **c** en la siguiente gráfica.



[3 puntos]

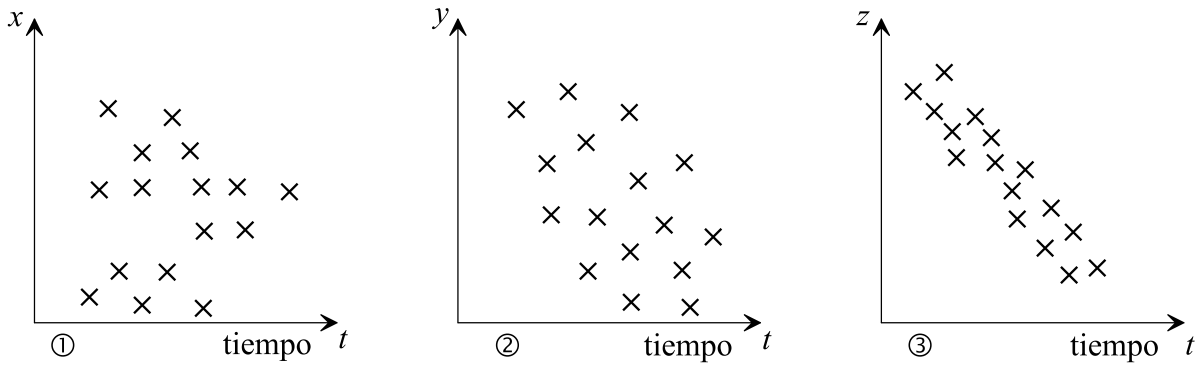
(b) ¿Cuál es la probabilidad de que un palo elegido al azar mida más de 4,85 m? *[3 puntos]*

(c) El fabricante prepara la máquina para hacer palos distintos con una longitud media de 3,5 m. Se sabe que el 90 % de los palos tendrán una longitud menor de 3,8 m. ¿Cuál es la desviación típica de estas longitudes? *[4 puntos]*

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 7: continuación)

(iii) Las siguientes figuras muestran diagramas de dispersión que representan el modo en que las variables x, y, z varían respecto al tiempo, t, en un experimento químico dado. Están rotuladas como ①, ② y ③.



(a) Determine cuál de los diagramas indica que las dos variables

(i) no están correlacionadas. *[1 punto]*

(ii) muestran una correlación lineal fuerte. *[1 punto]*

(b) Un alumno recibe un trozo de papel en el que hay escritos cinco números. Sabe que tres de esos números son los coeficientes de correlación producto-momento de los tres pares de variables anteriores. Los cinco números son

$$0{,}9;\quad -0{,}85;\quad -0{,}20;\quad 0{,}04;\quad 1{,}60\,.$$

(i) Determine cuáles de estos cinco números son los valores más apropiados de los coeficientes de correlación para cada una de las figuras anteriores. *[3 puntos]*

(ii) Indique por qué rechaza para este experimento los dos números restantes. *[2 puntos]*

(c) De otra variable, w, respecto al tiempo, t, se ha obtenido la siguiente información para 20 puntos de datos:

$$\sum t = 124\,;\ \sum w = 250\,;\ s_t = 6{,}08\,;\ s_w = 10{,}50\,;\ s_{tw} = 55{,}00\,.$$

Calcule

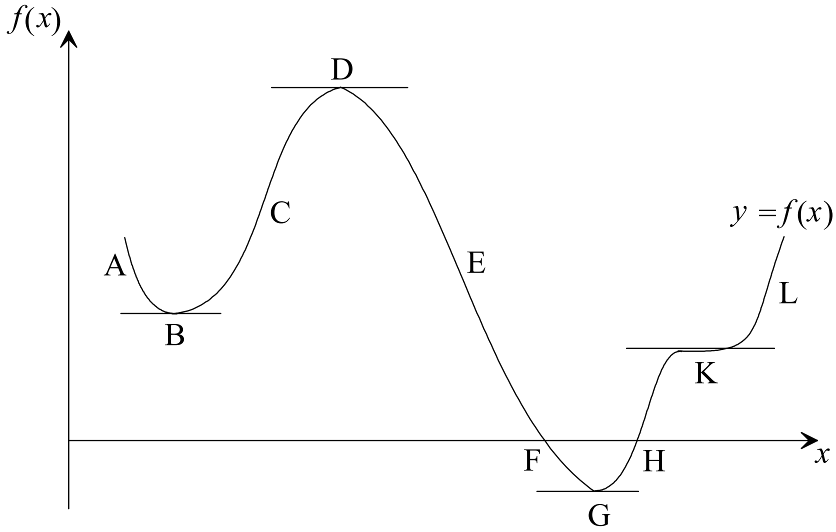
(i) el coeficiente de correlación producto-momento de estos datos. *[2 puntos]*

(ii) la ecuación de la recta de regresión de w sobre t en la forma $w = at + b$. *[5 puntos]*

Introducción al cálculo diferencial

8. *[Puntuación máxima: 30]*

(i)



Dada la gráfica de $f(x)$, establezca

(a) los intervalos entre A y L, en los cuales $f(x)$ es creciente. *[1 punto]*

(b) los intervalos entre A y L, en los cuales $f(x)$ es decreciente. *[1 punto]*

(c) un punto que sea un valor máximo. *[1 punto]*

(d) un punto que sea un valor mínimo. *[1 punto]*

(e) el nombre que recibe el punto K donde la pendiente es cero. *[1 punto]*

(ii) Considere la función $g(x) = x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x + 4$.

Halle

(a) $g'(x)$ *[3 puntos]*

(b) $g'(1)$ *[2 puntos]*

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 8: continuación)

(iii) Dada la función $y = ax^2 + bx + 6$.

(a) Halle $\frac{dy}{dx}$. *[2 puntos]*

(b) Sabiendo que cuando x es 6 la pendiente de esta función es 2, escriba una ecuación en función de a y b. *[2 puntos]*

(c) Si el punto (3, –15) pertenece a la gráfica de la función, halle una segunda ecuación en función de a y b. *[2 puntos]*

(iv) El costo de producir un libro de texto de matemáticas es de \$ 15 (dólares americanos), y se vende después por \$ x.

(a) Halle una expresión para el beneficio obtenido por la venta de cada libro. *[1 punto]*

Se vende un total de $(100\,000 - 4\,000x)$ libros.

(b) Compruebe que el beneficio obtenido por todos los libros vendidos es $P = 160\,000x - 4\,000x^2 - 1\,500\,000$. *[3 puntos]*

(c) (i) Halle $\frac{dP}{dx}$. *[2 puntos]*

(ii) A partir de lo anterior, calcule el valor de x que produce un beneficio máximo. *[2 puntos]*

(d) Calcule el número de libros vendidos para producir este beneficio máximo. *[2 puntos]*

(v) Una partícula que se mueve en línea recta pasa por un punto fijo O a una velocidad de $20\ \text{m s}^{-1}$. Su aceleración a m s^{-2} viene dada por $a = 2t - 8$, donde t segundos es el tiempo transcurrido desde que la partícula pasa por el punto fijo O.

Escriba una expresión para v, la velocidad de la partícula, a los t segundos después de haber pasado por el punto O. *[4 puntos]*