N04/5/MATME/SP2/SPA/TZ0/XX

88047210

MÉTODOS MATEMÁTICOS
NIVEL MEDIO
PRUEBA 2

Jueves 4 de noviembre de 2004 (mañana)

2 horas

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste las cinco preguntas de la Sección A y una pregunta de la Sección B.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o con tres cifras significativas.
- Indique la marca y el modelo de su calculadora en el cuadro correspondiente de la portada del examen.

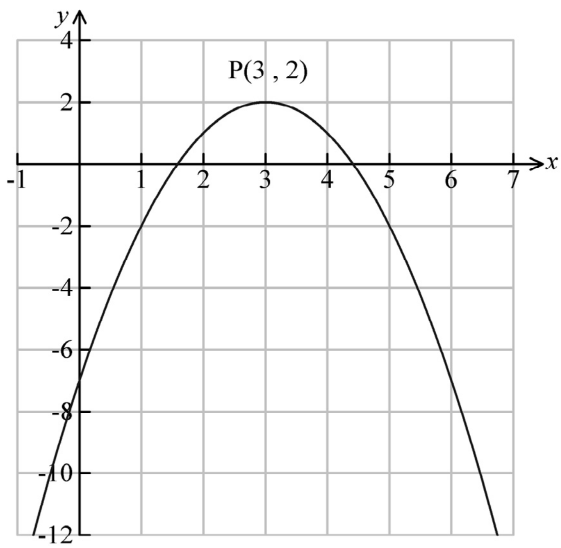
Empiece una página nueva para cada respuesta. Se recomienda que muestre todos los cálculos, siempre que sea posible. Cuando la respuesta sea incorrecta se otorgarán algunos puntos siempre que aparezca el método empleado y éste sea correcto. Para los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el proceso seguido hasta su obtención. Por ejemplo, cuando deba utilizar gráficas de una calculadora de pantalla gráfica para hallar soluciones, deberá dibujar esas gráficas en su respuesta.

SECCIÓN A

Conteste las ***cinco*** *preguntas de esta sección.*

1. *[Puntuación máxima: 13]*

La función $f(x)$ está definida como $f(x) = -(x-h)^2 + k$. La siguiente figura muestra parte de la gráfica de $f(x)$. El máximo de la curva es el punto $\mathrm{P}(3,2)$.



(a) Escriba el valor de

(i) h;

(ii) k. *[2 puntos]*

(b) Compruebe que $f(x)$ se puede escribir como $f(x) = -x^2 + 6x - 7$. *[1 punto]*

(c) Halle $f'(x)$. *[2 puntos]*

El punto Q de la gráfica tiene coordenadas $(4,1)$. Una recta L, que pasa por Q, es perpendicular a la tangente en Q.

(d) (i) Calcule la pendiente de L.

(ii) Halle la ecuación de L.

(iii) La recta L corta de nuevo a la curva en R. Halle la abscisa de R. *[8 puntos]*

2. *[Puntuación máxima: 15]*

Los puntos A, B y C tienen vectores de posición $4\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}$ y $-5\boldsymbol{i}-5\boldsymbol{j}$. Sea D un punto sobre el eje x tal que ABCD forma un paralelogramo.

(a) (i) Halle $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$.

(ii) Halle el vector de posición de D. *[4 puntos]*

(b) Halle el ángulo que forman $\overrightarrow{\mathrm{BD}}$ y $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$. *[6 puntos]*

La recta L_1 pasa por A y es paralela a $\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}$. La recta L_2 pasa por B y es paralela a $2\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j}$. Una ecuación vectorial de L_1 es $\boldsymbol{r}=(4\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j})+s(\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j})$.

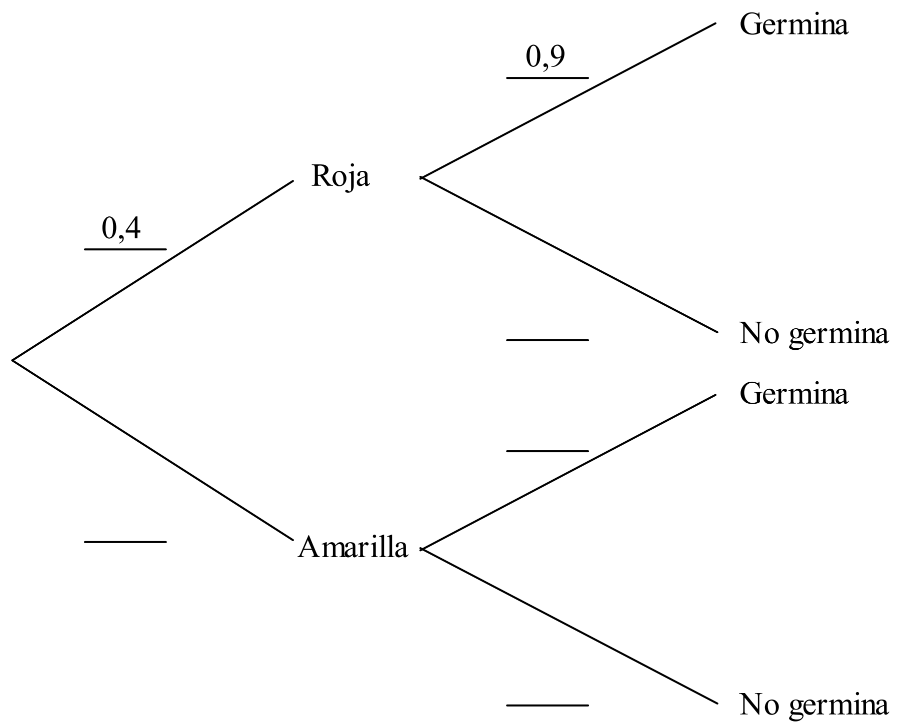
(c) Escriba una ecuación vectorial de L_2 en la forma $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{b}+t\boldsymbol{q}$. *[1 punto]*

(d) Las rectas L_1 y L_2 se cortan en el punto P. Halle el vector de posición de P. *[4 puntos]*

3. *[Puntuación máxima: 10]*

Un paquete de semillas contiene un 40 % de semillas rojas y un 60 % de semillas amarillas. La probabilidad de que una semilla roja germine es 0,9 y la de una semilla amarilla es 0,8. Se elige al azar una semilla del paquete.

(a) Copie y complete el siguiente diagrama de árbol de probabilidades en el **cuadernillo de respuestas**.



[3 puntos]

(b) (i) Calcule la probabilidad de que la semilla elegida sea roja y germine.

(ii) Calcule la probabilidad de que la semilla elegida germine.

(iii) Suponiendo que la semilla germina, calcule la probabilidad de que sea roja. *[7 puntos]*

4. *[Puntuación máxima: 11]*

Una empresa ofrece a sus empleados la posibilidad de elegir entre dos planes de salarios A y B durante un período de 10 años.

El plan A ofrece un sueldo inicial de \$11 000 durante el primer año y un incremento posterior de \$400 al año.

(a) (i) Escriba los sueldos correspondientes al segundo año y al tercer año.

(ii) Calcule el salario (cantidad) **total** recibido en los diez años. *[3 puntos]*

El plan B ofrece un sueldo inicial de \$10 000 durante el primer año y un incremento posterior anual del 7 % sobre el sueldo del año anterior.

(b) (i) Escriba los sueldos correspondientes al segundo año y al tercer año.

(ii) Calcule el sueldo correspondiente al décimo año. *[4 puntos]*

(c) Arturo trabaja durante un total de n años según el plan A. Bill trabaja durante un total de n años según el plan B. Calcule el número mínimo de años para que el total ganado por Bill supere el total ganado por Arturo. *[4 puntos]*

5. *[Puntuación máxima: 21]*

(i) Sea $f(x) = 1 + 3\cos(2x)$ para $0 \le x \le \pi$, donde x viene expresado en radianes.

(a) (i) Halle $f'(x)$.

(ii) Halle los valores de x para los cuales $f'(x) = 0$, expresando las respuestas en función de π. *[6 puntos]*

La función $g(x)$ está definida como $g(x) = f(2x) - 1$, $0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}$.

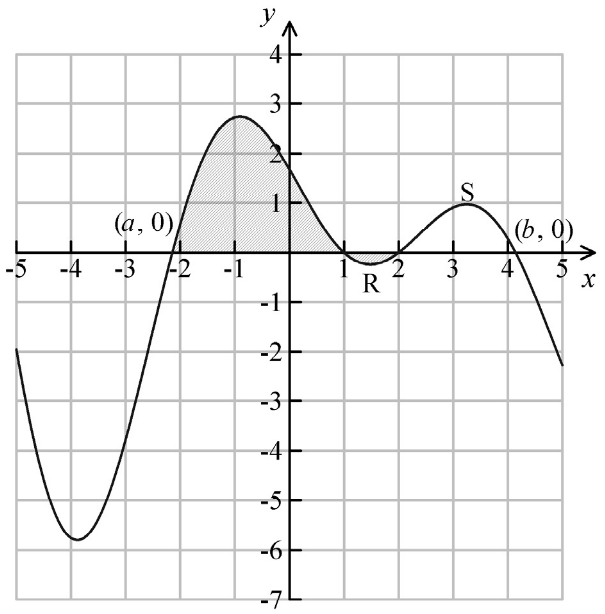
(b) (i) La gráfica de f se puede transformar en la gráfica de g mediante un estiramiento de razón $\dfrac{1}{2}$ en la dirección del eje x seguida de otra transformación. Dé una descripción completa de esta otra transformación.

(ii) Halle la solución de la ecuación $g(x) = f(x)$. *[4 puntos]*

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 5: continuación)

(ii) Sea $h(x) = (x-2)\operatorname{sen}(x-1)$ para $-5 \le x \le 5$. A continuación se muestra la curva de $h(x)$. Existe un mínimo local en R y un máximo local en S. La curva corta al eje x en los puntos $(a, 0)$ $(1, 0)$ $(2, 0)$ and $(b, 0)$.



(a) Halle los valores exactos de

(i) a;

(ii) b. *[2 puntos]*

Las regiones entre la curva y el eje x para $a \le x \le 2$ están sombreadas según se muestra en la figura.

(b) (i) Escriba una expresión que represente el área **total** de las regiones sombreadas.

(ii) Calcule esta área total. *[5 puntos]*

(c) (i) La ordenada de R es $-0,240$. Halle la ordenada de S.

(ii) A partir de lo anterior, o de cualquier otro modo, halle el conjunto de valores de k para los cuales la ecuación $(x-2)\operatorname{sen}(x-1) = k$ tiene **cuatro** soluciones distintas. *[4 puntos]*

SECCIÓN B

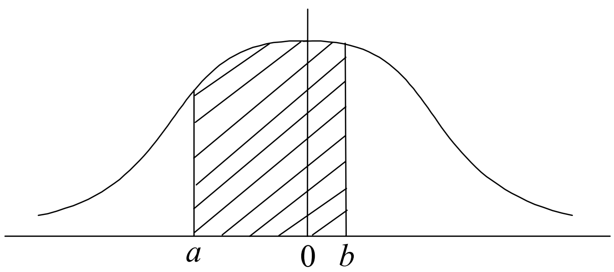
*Conteste **una** pregunta de esta sección.*

Métodos estadísticos

6. *[Puntuación máxima: 30]*

(i) Los tiempos de reacción en seres humanos están normalmente distribuidos con una media de 0,76 segundos y una desviación típica de 0,06 segundos.

(a) La gráfica siguiente es la curva de una distribución normal **estándar**. La región sombreada representa la probabilidad de que el tiempo de reacción de una persona elegida al azar se encuentre entre 0,70 y 0,79 segundos.



(i) Escriba el valor de a y de b.

(ii) Calcule la probabilidad de que el tiempo de reacción de una persona elegida al azar

(a) sea mayor de 0,70 segundos;

(b) se encuentre entre 0,70 y 0,79 segundos. *[6 puntos]*

El tres por ciento (3 %) de la población tiene un tiempo de reacción menor de c segundos.

(b) (i) Represente esta información en un diagrama similar al anterior. Indique claramente qué área representa el 3 %.

(ii) Halle c. *[4 puntos]*

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 6: continuación)

(ii) El contenido de ciertas botellas de agua mineral está normalmente distribuido con una media de μ ml y una desviación típica de 2,5 ml.

(a) Sea la hipótesis nula que $\mu = 298$. Suponiendo que la hipótesis nula es cierta, halle la probabilidad de que una muestra aleatoria de 25 botellas tenga una media menor o igual a 297,2 ml. *[3 puntos]*

(b) Se halló que una muestra aleatoria de 25 botellas tenía una media de 297,2 ml.

(i) Al nivel de significación del 5 %, ¿cuál de las siguientes hipótesis aceptaría?

$$H_0: \quad \mu = 298$$
$$H_1: \quad \mu < 298$$

Justifique la respuesta.

(ii) Calcule el intervalo de confianza del 99 % para μ. *[7 puntos]*

(iii) La siguiente tabla ofrece información sobre la situación laboral de un grupo aleatorio de hombres y mujeres de una ciudad.

	Desempleados	Empleados a tiempo parcial	Empleados a tiempo completo
Hombres	8	11	16
Mujeres	20	10	10

Se va a realizar una prueba de chi cuadrado para determinar si la situación laboral es independiente del sexo. La tabla de contingencia para las frecuencias esperadas según los datos anteriores es la siguiente.

	Desempleados	Empleados a tiempo parcial	Empleados a tiempo completo
Hombres	13,07	p	q
Mujeres	r	s	t

(a) Enuncie la hipótesis utilizada para calcular los valores de la tabla de contingencia. *[2 puntos]*

(b) Calcule el valor de r y de t. *[3 puntos]*

(c) Calcule el valor de χ^2 para esta situación. *[2 puntos]*

(d) Establezca la conclusión relativa a si la situación laboral es independiente del sexo o no lo es, al nivel de significación del 5 %. Justifique la respuesta. *[3 puntos]*

Extensión de análisis

7. *[Puntuación máxima: 30]*

(i) Sea $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

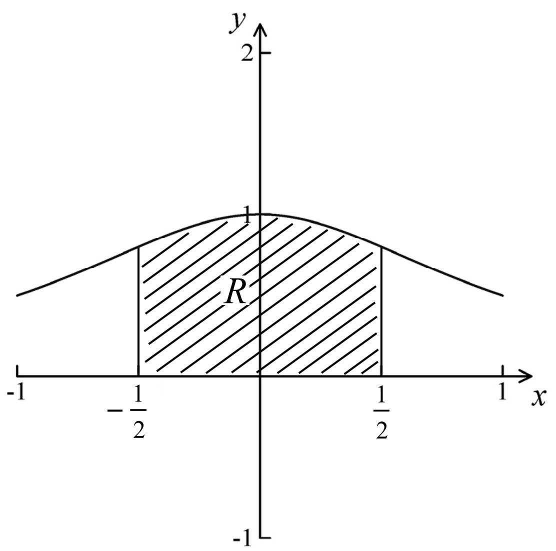
(a) Escriba la ecuación de la asíntota horizontal de la gráfica de *f*. *[1 punto]*

(b) Halle $f'(x)$. *[3 puntos]*

(c) La derivada segunda viene dada por $f''(x) = \dfrac{6x^2 - 2}{\left(1+x^2\right)^3}$.

Sea A el punto de la gráfica de *f* donde la pendiente de la tangente es un máximo. Halle la abscisa de A. *[4 puntos]*

(d) Sea R la región bajo la gráfica de *f*, entre $x = -\dfrac{1}{2}$ y $x = \dfrac{1}{2}$, según se muestra en la siguiente figura.



(i) Escriba la integral definida que representa el área de R.

(ii) Utilice la regla del trapecio con cuatro subintervalos para estimar el área de R.

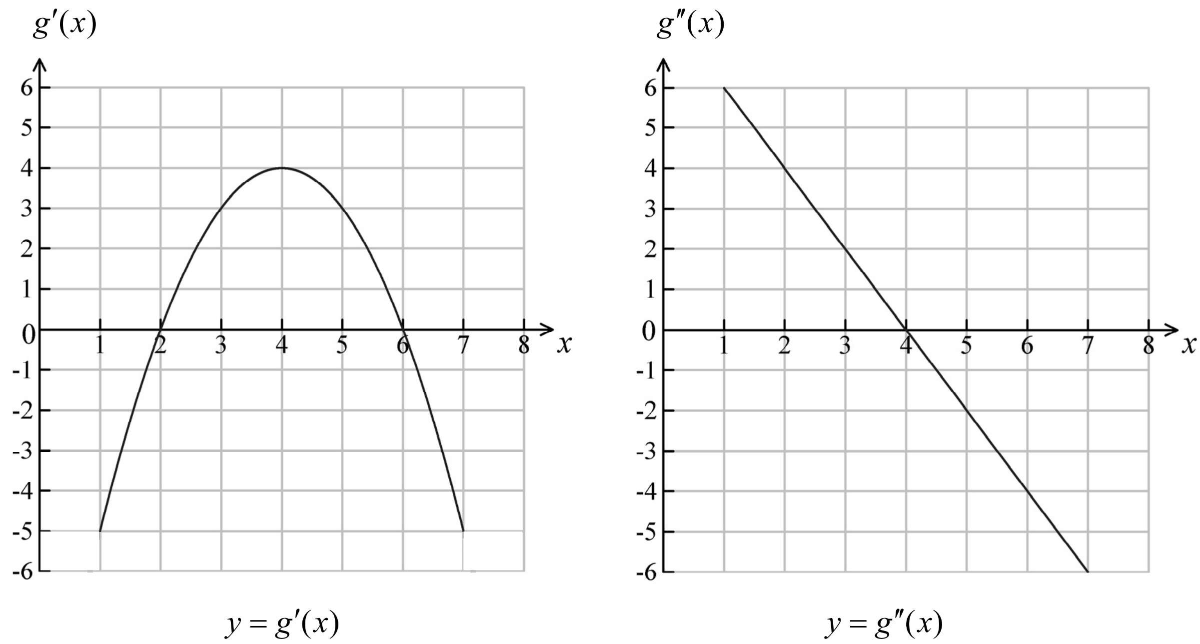
(iii) Explique brevemente la razón por la que el área de R es mayor que la estimada utilizando la regla del trapecio. *[6 puntos]*

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 7: continuación)

(ii) Sea $y = g(x)$ una función para $1 \le x \le 7$. La gráfica de g tiene un punto de inflexión P, y un mínimo M.

A continuación aparecen dibujadas aproximadamente parte de las curvas correspondientes a las gráficas de g' y de g''.



Utilice esta información para responder a lo siguiente.

(a) Escriba la abscisa de P, **y** justifique la respuesta. *[2 puntos]*

(b) Escriba la abscisa de M, **y** justifique la respuesta. *[2 puntos]*

(c) Sabiendo que $g(4) = 0$, dibuje aproximadamente la gráfica de g. Señale en el dibujo los puntos P y M. *[4 puntos]*

(iii) Sea $h(x) = \dfrac{\tan x + 1}{\cos^2 x}$.

(a) Haciendo uso de la sustitución $u = \tan x$, o de cualquier otro modo, halle $\int h(x)\,\mathrm{d}x$. *[4 puntos]*

(b) Compruebe que $\int_0^{\frac{\pi}{4}} h'(x)\,\mathrm{d}x = 3$. *[4 puntos]*

Extensión de geometría

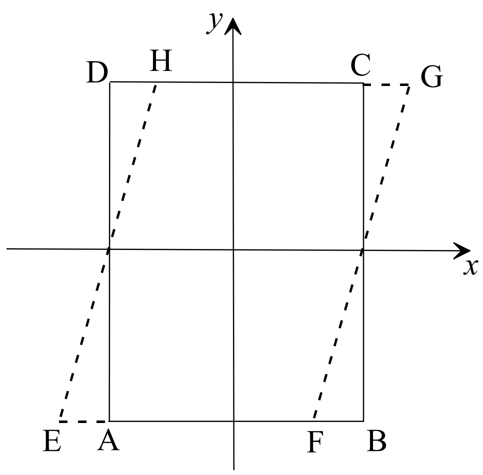
8. *[Puntuación máxima: 30]*

(i) (a) La transformación $\boldsymbol{S}$ está representada por la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

(i) Dé una descripción geométrica completa de $\boldsymbol{S}$.

(ii) ¿Cuál es la razón de área de $\boldsymbol{S}$? *[4 puntos]*

(b) Otra transformación $\boldsymbol{U}$ de este tipo, transforma el rectángulo ABCD de vértices $\mathrm{A}(-3,-4)$, $\mathrm{B}(3,-4)$, $\mathrm{C}(3,4)$, $\mathrm{D}(-3,4)$ en el paralelogramo EFGH de vértices $\mathrm{E}(-4,-4)$, $\mathrm{F}(2,-4)$, $\mathrm{G}(4,4)$, $\mathrm{H}(-2,4)$. La siguiente figura ilustra esta transformación.



Escriba

(i) la ecuación de la recta invariante mediante la transformación $\boldsymbol{U}$;

(ii) la razón de la transformación $\boldsymbol{U}$.

Halle

(iii) el área de ABCD;

(iv) el área de EFGH. *[4 puntos]*

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 8 (i): continuación)

La transformación $\boldsymbol{T}$ está representada por la matriz $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. Cuando se aplica $\boldsymbol{T}$ al paralelogramo EFGH, E se transforma en $\mathrm{J}(-16,-16)$ y F en $\mathrm{K}(2,-4)$. L es la imagen de G y M es la imagen de H.

(c) Halle las coordenadas de

(i) L;

(ii) M. *[4 puntos]*

(d) Calcule el área de JKLM. *[2 puntos]*

(e) Sobre papel milimetrado, y utilizando una escala de 1 cm = 2 unidades, dibuje las figuras

(i) EFGH;

(ii) JKLM. *[3 puntos]*

(f) (i) A partir del dibujo, identifique un vértice distinto de F que sea imagen de sí mismo.

(ii) A partir de lo anterior, dibuje la recta invariante, L_1, en la cual todo punto es imagen de sí mismo mediante $\boldsymbol{T}$.

(iii) Escriba la ecuación de L_1. *[3 puntos]*

(g) A partir del dibujo, también ha de ser evidente que existe otra recta, L_2, en la cual la imagen de cada punto es otro punto distinto (que nunca coincide con (0, 0)) de la misma recta. Dibuje esta recta en el papel milimetrado. *[1 punto]*

(h) JKLM se transforma de nuevo en EFGH por medio de la transformación $\boldsymbol{V}$. Escriba la matriz que representa $\boldsymbol{V}$. *[2 puntos]*

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 8: continuación)

(ii) La recta de ecuación $3x-4y=0$ forma un ángulo θ con el eje x.

Se puede comprobar que $\operatorname{sen}\theta = \frac{3}{5}$ y que $\cos\theta = \frac{4}{5}$. La transformación $\boldsymbol{R}$ es una simetría respecto a la recta $3x-4y=0$.

(a) Compruebe que la matriz que representa $\boldsymbol{R}$ es $\frac{1}{25}\begin{pmatrix} 7 & 24 \\ 24 & -7 \end{pmatrix}$. *[3 puntos]*

Otra simetría $\boldsymbol{P}$ está representada por $\boldsymbol{P}:\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \boldsymbol{R}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \end{pmatrix}$.

(b) Escriba la ecuación del eje de simetría de la transformación $\boldsymbol{P}$. *[3 puntos]*

(c) Dé una descripción general de otras rectas invariantes mediante esta transformación. *[1 punto]*