MÉTODOS MATEMÁTICOS
NIVEL MEDIO
PRUEBA 2

Viernes 7 de mayo de 2004 (mañana)

2 horas

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste las cinco preguntas de la Sección A y una pregunta de la Sección B.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o con tres cifras significativas.
- Escriba la marca y el modelo de su calculadora en el cuadro correspondiente de la portada del examen (p. ej., Casio *fx-9750G*, Sharp EL-9600, Texas Instruments TI-85).

Empiece una página nueva para cada respuesta. Se recomienda que muestre todos los cálculos, siempre que sea posible. Cuando la respuesta sea incorrecta se otorgarán algunos puntos siempre que aparezca el método empleado y éste sea correcto. Para los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el proceso seguido hasta su obtención. Por ejemplo, cuando deba utilizar gráficas de una calculadora de pantalla gráfica para hallar soluciones, deberá dibujar esas gráficas en su respuesta.

SECCIÓN A

Conteste las **cinco** *preguntas de esta sección.*

1. *[Puntuación máxima: 15]*

Los vectores de posición de los puntos A y B son $\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ respectivamente.

(a) (i) Halle el vector $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.

(ii) Halle $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$. *[4 puntos]*

El vector de posición del punto D es $\begin{pmatrix} d \\ 22 \end{pmatrix}$.

(b) Halle el vector $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ en función de *d*. *[2 puntos]*

El ángulo $\mathrm{B\hat{A}D}$ es de 90°.

(c) (i) Compruebe que $d = 9$.

(ii) Escriba el vector de posición del punto D. *[3 puntos]*

El cuadrilátero ABCD es un rectángulo.

(d) Halle el vector de posición del punto C. *[4 puntos]*

(e) Halle el área del rectángulo ABCD. *[2 puntos]*

2. *[Puntuación máxima: 14]*

La derivada de la función f viene dada por $f'(x) = \mathrm{e}^x + x - 5$. El punto $(1, \mathrm{e} - 2)$ pertenece a la gráfica de $f(x)$.

(a) Compruebe que $f(x) = \mathrm{e}^x + \frac{1}{2}x^2 - 5x + 2{,}5$. *[7 puntos]*

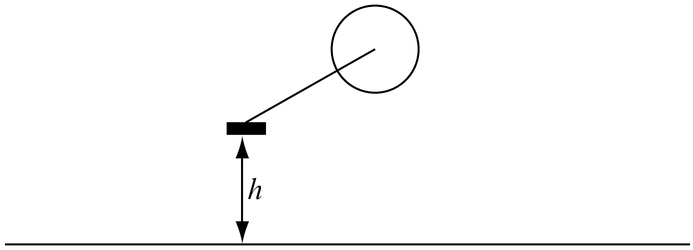
(b) Dibuje aproximadamente la gráfica de $y = f(x)$ para $-3 < x \le 3$. *[2 puntos]*

(c) Halle el valor mínimo de $f(x)$. *[2 puntos]*

(d) Halle el área encerrada por la gráfica de $y = f(x)$, los ejes de coordenadas y la recta $x = 2$. *[3 puntos]*

3. *[Puntuación máxima: 10]*

El diagrama que aparece a continuación muestra el pedal de una bicicleta.



La altura h cm del pedal de la bicicleta sobre el suelo después de t segundos viene dada por $h = 24 - 14 \operatorname{sen} 2t$.

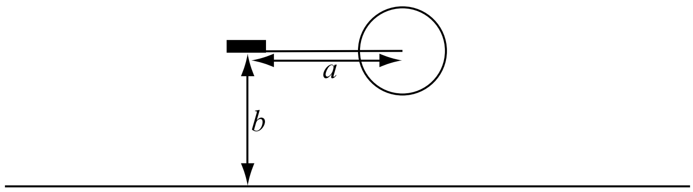
(a) Halle la altura cuando $t = 0$. *[2 puntos]*

(b) Halle la altura máxima del pedal sobre el suelo. *[1 punto]*

(c) Halle cuándo ocurre esto por primera vez. *[1 punto]*

(d) ¿Cuánto tarda el pedal en dar una vuelta completa? *[2 puntos]*

El diagrama inferior muestra el pedal en su posición inicial.

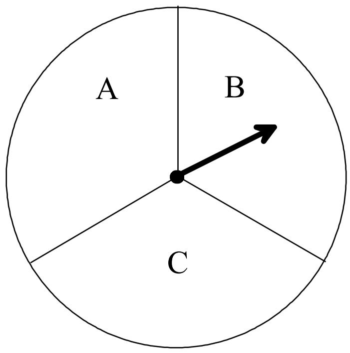


(e) Escriba el valor de las longitudes a y b. *[2 puntos]*

(f) Escriba una expresión para la altura del otro pedal sobre el suelo a los t segundos. *[2 puntos]*

4. *[Puntuación máxima: 16]*

(i) Un disco está dividido en tres sectores circulares iguales, A, B y C, como se muestra en la figura. La flecha puede girar, pero no nunca se para sobre las rectas que limitan los sectores.



Se hace girar la flecha dos veces, anotando en cada caso la letra del sector a la que apunta la flecha al pararse.

(a) Describa el espacio muestral. *[1 punto]*

(b) Calcule la probabilidad de que

(i) las dos letras sean iguales;

(ii) al menos una de las letras sea A;

(iii) al menos una de las letras sea A y las dos letras sean iguales;

(iv) al menos una de las letras sea A o las dos letras sean iguales. *[4 puntos]*

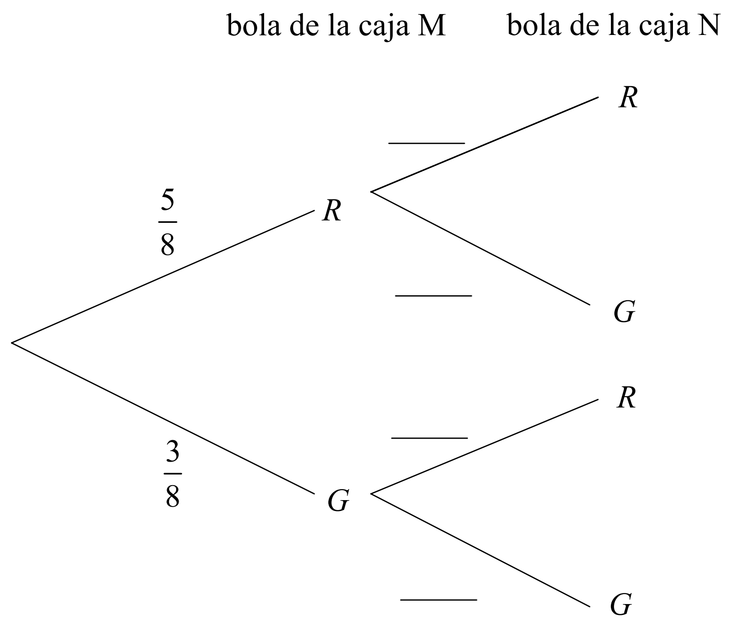
(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 4: continuación)

(ii) Dos cajas M y N contienen bolas rojas (R) y verdes (G).
La caja M contiene cinco bolas rojas y tres bolas verdes.
La caja N contiene cuatro bolas rojas y seis bolas verdes.

Se extrae al azar una bola de la caja M y se introduce en la caja N. Después se extrae al azar una bola de la caja N.

(a) Copie y complete el siguiente diagrama.



[4 puntos]

(b) Calcule la probabilidad de que la bola extraída de la caja N sea verde. *[3 puntos]*

(c) Suponiendo que la bola extraída de la caja N sea verde, halle la probabilidad de que la bola extraída de la caja M sea roja. *[4 puntos]*

5. *[Puntuación máxima: 15]*

En una ciudad existían 1420 médicos trabajando al 1 de enero de 1994. Después de n años, el número de médicos, D, que trabajan en la ciudad viene dado por

$$D = 1420 + 100n\ .$$

(a) (i) ¿Cuántos médicos trabajaban en la ciudad a comienzos del año 2004?

(ii) ¿En qué año hubo por primera vez más de 2000 médicos trabajando en la ciudad? *[3 puntos]*

A comienzos del año 1994, la ciudad tenía una población de 1,2 millones de habitantes. Pasados n años, la población de la ciudad, P, viene dada por

$$P = 1\,200\,000\,(1{,}025)^n\ .$$

(b) (i) Halle la población P a comienzos de 2004.

(ii) Calcule el porcentaje de crecimiento de la población entre el 1 de enero de 1994 y el 1 de enero de 2004.

(iii) ¿En qué año la población será por primera vez mayor que 2 millones de habitantes? *[7 puntos]*

(c) (i) ¿Cuál era el número medio de personas por médico a comienzos de 1994?

(ii) ¿Después de cuántos años **completos** descenderá por primera vez el número de personas por médico por debajo de 600? *[5 puntos]*

SECCIÓN B

*Conteste **una** pregunta de esta sección.*

Métodos estadísticos

6. *[Puntuación máxima: 30]*

(i) La cantidad de líquido en una lata está normalmente distribuida con una media de 379 ml y una desviación típica de d ml.

(a) Si $d = 2{,}7$, halle la probabilidad de que una lata contenga menos de 375 ml. *[3 puntos]*

(b) Cuando $d = 3{,}6$, la cantidad de líquido en el 90 % de las latas supera los x ml. Halle el valor de x, aproximando su respuesta con una cifra decimal. *[3 puntos]*

(c) La proporción de latas en las que la cantidad de líquido es menor de 370 ml es 0,01. Halle el valor de d. *[4 puntos]*

(ii) Una fábrica lleva un registro diario del número de cajas (x) que produce y el costo de la producción total (y) en dólares. La siguiente tabla muestra los resultados a lo largo de nueve días.

x	28	45	60	48	51	33	67	40	56
y	460	580	770	600	640	490	830	570	730

(a) Escriba la ecuación de la recta de regresión de mínimos cuadrados de y sobre x. *[3 puntos]*

(b) En esta situación, interprete el significado de

(i) la pendiente;

(ii) la ordenada al origen. *[2 puntos]*

(c) Utilice la ecuación del apartado (a) para responder a lo siguiente.

(i) Estime el costo de fabricar 55 cajas.

(ii) La fábrica vende las cajas a \$ 13,20 cada una. Halle el número mínimo de cajas que debe fabricar en un día para obtener beneficio. *[6 puntos]*

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 6: continuación)

(iii) En un bosque, la circunferencia de los árboles en su base está normalmente distribuida con una media de 70 cm y una desviación típica de 8 cm.

(a) Se miden las circunferencias de una muestra de 30 árboles. Halle la probabilidad de que la circunferencia media sea mayor de 72 cm. *[3 puntos]*

(b) Se selecciona otra muestra de modo que la probabilidad de que su media se encuentre entre 68 y 72 sea mayor de 0,95. Halle el tamaño mínimo de esa muestra. *[6 puntos]*

Extensión de análisis

7. *[Puntuación máxima: 30]*

(i) La función g está definida como $g(x) = \dfrac{e^x}{x}, -2 \le x \le 3$.

(a) Dibuje aproximadamente la gráfica de $y = g(x)$, con $-4 \le y \le 6$. *[2 puntos]*

(b) (i) Halle $g'(x)$.

(ii) A partir de la respuesta anterior, calcule los valores exactos de las coordenadas del mínimo de la gráfica de g. *[6 puntos]*

(c) La derivada segunda de g es $g''(x) = \dfrac{e^x(x^2 - 2x + 2)}{x^3}$.

Utilice este resultado para explicar por qué la gráfica de g no puede tener ningún punto de inflexión. *[4 puntos]*

(ii) ***Nota: En toda esta parte del ejercicio se utilizan radianes.***

Considere la función $f(x) = \operatorname{sen} x + 2x - 1$.

(a) Utilice el método de Newton-Raphson para resolver $f(x) = 0$, comenzando con $x_0 = 1$. Exprese la respuesta con siete cifras significativas. *[3 puntos]*

(b) La ecuación $f(x) = 0$ también se puede resolver por medio de la iteración de punto fijo, con $x_{n+1} = \dfrac{1 - \operatorname{sen} x_n}{2}$.

(i) Empezando con $x_0 = 1$, escriba el valor de x_1 y de x_2 aproximando las respuestas a siete cifras decimales.

(ii) Explique por qué esta iteración siempre converge, con independencia del valor de partida elegido. *[5 puntos]*

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 7: continuación)

(iii) (a) Utilice la regla del trapecio con dos sub-intervalos para hallar $\int_0^2 9x^2\left(\sqrt{x^3+1}\right)\mathrm{d}x$. *[4 puntos]*

(b) (i) Utilice la sustitución $u = x^3 + 1$ para comprobar que $\int 9x^2\left(\sqrt{x^3+1}\right)\mathrm{d}x = 2(x^3+1)^{\frac{3}{2}} + c$.

(ii) A partir de lo anterior, calcule el valor de k en $\int_0^k 9x^2\left(\sqrt{x^3+1}\right)\mathrm{d}x = 594$. *[6 puntos]*

Extensión de geometría

8. *[Puntuación máxima: 30]*

(i) (a) Escriba las matrices que representan las siguientes transformaciones.

(i) $\boldsymbol{H}$, cizalladura de razón 2 en la dirección del eje x.

(ii) $\boldsymbol{S}$, estiramiento de razón 2 en la dirección del eje y.

(iii) $\boldsymbol{R}$, simetría axial respecto al eje x. *[3 puntos]*

(b) Dé una descripción geométrica completa de cada una de las transformaciones $\boldsymbol{H}^{-1}$, $\boldsymbol{S}^{-1}$, $\boldsymbol{R}^{-1}$. *[3 puntos]*

(c) La transformación $\boldsymbol{M}$ es $\boldsymbol{R}$, seguida de $\boldsymbol{S}$, seguida de $\boldsymbol{H}$.

(i) Exprese la matriz $\boldsymbol{M}$ como producto de $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{S}$ y $\boldsymbol{H}$.

La matriz final es $\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

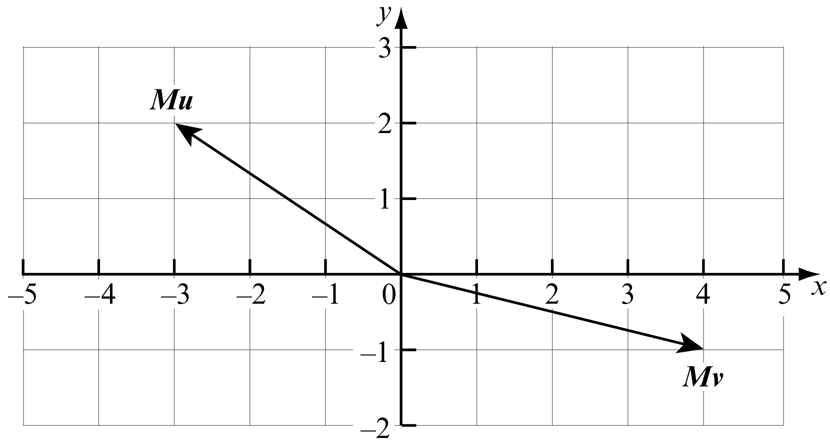
(ii) Halle todos los puntos invariantes mediante $\boldsymbol{M}$.

(iii) Halle la imagen de la recta $y = -x + 2$ mediante $\boldsymbol{M}$. *[8 puntos]*

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 8 (i): continuación)

(d) Se transforman los vectores $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ mediante $\boldsymbol{M}$. Sus imágenes $\boldsymbol{Mu}$ y $\boldsymbol{Mv}$ se muestran a continuación.



(i) Escriba los vectores columna $\boldsymbol{Mu}$ y $\boldsymbol{Mv}$.

(ii) Sea $\boldsymbol{w} = 3\boldsymbol{u} - 2\boldsymbol{v}$. Su imagen mediante $\boldsymbol{M}$ es $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Halle a y b. *[4 puntos]*

(ii) La recta L tiene por ecuación $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 2$. La transformación $\boldsymbol{T}$ es una simetría axial respecto a L y se puede expresar como

$$\boldsymbol{T}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boldsymbol{F}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

(a) (i) Halle la matriz $\boldsymbol{F}$.

(ii) Halle el vector $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$. *[8 puntos]*

(b) (i) Compruebe que la imagen del origen $(0, 0)$ mediante $\boldsymbol{T}$ es $(-\sqrt{3}, 3)$.

(ii) A partir de lo anterior, calcule la distancia perpendicular d desde el origen a L. *[4 puntos]*