MÉTHODES MATHÉMATIQUES
NIVEAU MOYEN
ÉPREUVE 2

Vendredi 7 mai 2004 (matin)

2 heures

INSTRUCTIONS DESTINÉES AUX CANDIDATS

- N'ouvrez pas cette épreuve avant d'y être autorisé.
- Répondez à toutes les questions de la section A et à une question de la section B.
- Sauf indication contraire dans l'intitulé de la question, les réponses numériques devront être exactes ou à trois chiffres significatifs près.
- Veuillez indiquer la marque et le modèle de votre calculatrice dans les cases appropriées sur la page de couverture (par exemple, *Casio fx-9750G*, Sharp EL-9600, Texas Instruments TI-85).

Veuillez répondre à chaque question sur une nouvelle page. On vous recommande d'indiquer votre raisonnement autant que possible. Lorsque la réponse est fausse, certains points seront accordés si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. Les solutions obtenues à l'aide de calculatrices à écran graphique doivent être accompagnées d'un raisonnement adéquat. Par exemple, si des graphiques sont utilisés pour trouver la solution, veuillez inclure un croquis de ces graphes dans votre réponse.

SECTION A

Répondez aux ***cinq*** *questions de cette section.*

1. *[Note maximum : 15]*

Les points A et B ont comme vecteurs positions $\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ respectivement.

(a) (i) Trouvez le vecteur $\overrightarrow{AB}$.

(ii) Trouvez $|\overrightarrow{AB}|$. *[4 points]*

Le point D a comme vecteur position $\begin{pmatrix} d \\ 22 \end{pmatrix}$.

(b) Trouvez le vecteur $\overrightarrow{AD}$ en fonction de *d*. *[2 points]*

L'angle $B\hat{A}D$ mesure 90°.

(c) (i) Montrez que $d = 9$.

(ii) Écrivez le vecteur position du point D. *[3 points]*

Le quadrilatère ABCD est un rectangle.

(d) Trouvez le vecteur position du point C. *[4 points]*

(e) Trouvez l'aire du rectangle ABCD. *[2 points]*

2. *[Note maximum : 14]*

La dérivée de la fonction f est donnée par $f'(x) = \mathrm{e}^x + x - 5$. Le point $(1;\mathrm{e}-2)$ est sur la courbe représentant $f(x)$.

(a) Montrez que $f(x) = \mathrm{e}^x + \frac{1}{2}x^2 - 5x + 2{,}5$. *[7 points]*

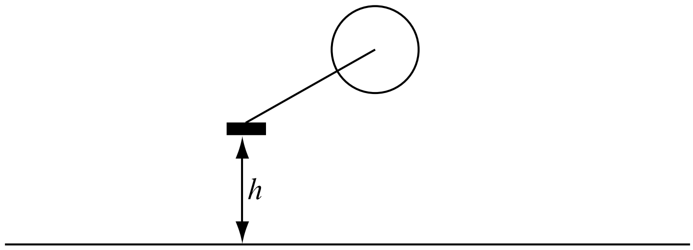
(b) Faites un croquis de la courbe de $y = f(x)$ pour $-3 < x \leqslant 3$. *[2 points]*

(c) Trouvez la valeur minimum de $f(x)$. *[2 points]*

(d) Trouvez l'aire de la surface limitée par la courbe $y = f(x)$, les axes et la droite $x = 2$. *[3 points]*

3. *[Note maximum : 10]*

La figure ci-dessous représente une pédale de bicyclette.



La hauteur, h cm, de la pédale de bicyclette par rapport au sol à l'instant t secondes est donnée par $h = 24 - 14\sin 2t$.

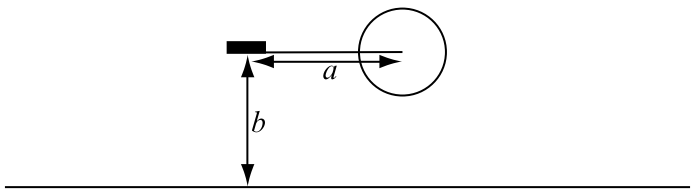
(a) Trouvez la hauteur quand $t = 0$. *[2 points]*

(b) Trouvez la hauteur maximum de la pédale par rapport au sol. *[1 point]*

(c) Trouvez le premier instant où cela se produit. *[1 point]*

(d) Combien de temps prend un tour de pédale ? *[2 points]*

La figure montre la pédale dans sa position de départ.

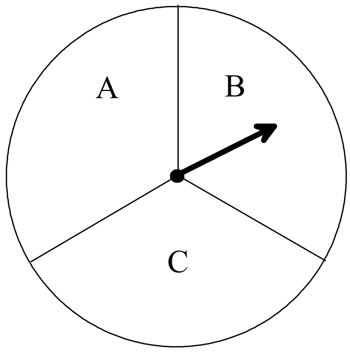


(e) Écrivez les longueurs a et b. *[2 points]*

(f) Écrivez une formule donnant la hauteur de l'autre pédale par rapport au sol à l'instant t secondes. *[2 points]*

4. *[Note maximum : 16]*

(i) Un disque est divisé en trois secteurs égaux A, B et C comme le montre la figure. On fait tournoyer la flèche. Elle ne peut pas s'arrêter sur les lignes entre les secteurs.



On lance la flèche deux fois. Chaque fois, on note la lettre du secteur dans lequel la flèche s'est arrêtée.

(a) Listez l'univers des possibles. *[1 point]*

(b) Calculez la probabilité pour que

(i) les deux lettres soient les mêmes ;

(ii) au moins une lettre soit un A ;

(iii) au moins une lettre soit un A et les deux lettres soient les mêmes ;

(iv) au moins une lettre soit un A ou les deux lettres soient les mêmes. *[4 points]*

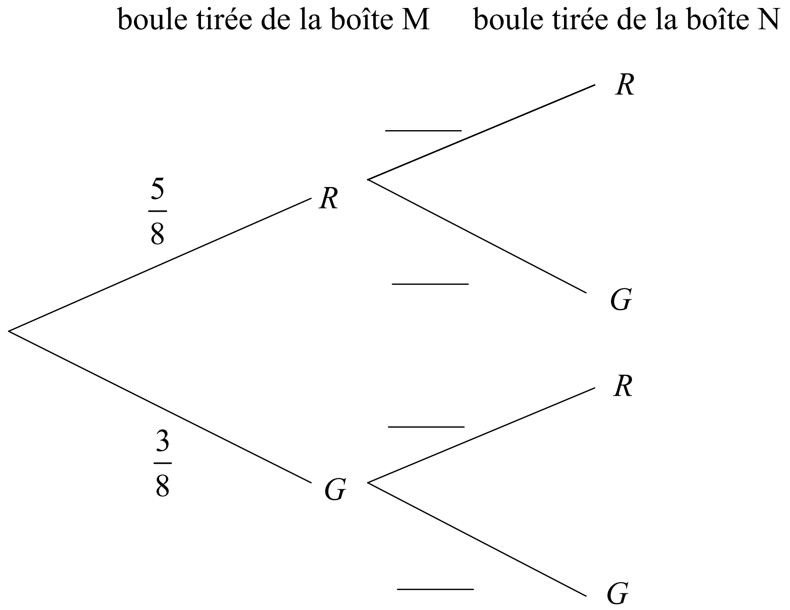
(Suite de la question à la page suivante)

(Suite de la question 4)

(ii) Deux boîtes M et N contiennent des boules rouges (R) et des boules vertes (G).
La boîte M contient cinq boules rouges et trois boules vertes.
La boîte N contient quatre boules rouges et six boules vertes.

Une boule est tirée au hasard de la boîte M et est mise dans la boîte N.
Une boule est alors tirée au hasard de la boîte N.

(a) Copiez et complétez l'arbre de choix .



[4 points]

(b) Calculez la probabilité que la boule tirée de la boîte N soit verte. *[3 points]*

(c) Sachant que la boule tirée de la boîte N est verte, trouvez la probabilité que la boule tirée de la boîte M soit rouge. *[4 points]*

5. *[Note maximum : 15]*

Il y avait 1420 docteurs en exercice dans une ville le 1er janvier 1994. Après n années, le nombre, D, de docteurs en exercice dans la ville est donné par

$$D = 1420 + 100n .$$

(a) (i) Combien y avait-il de docteurs en exercice dans la ville au début de l'année 2004 ?

(ii) En quelle année y a-t-il eu pour la première fois plus de 2000 docteurs en exercice dans la ville ? *[3 points]*

Au début de 1994, la population de la ville était de 1,2 million. Après n années, la population, P, de la ville est donnée par

$$P = 1\,200\,000\,(1{,}025)^n .$$

(b) (i) Trouvez la population P au début de 2004.

(ii) Calculez le pourcentage de croissance de la population entre le 1er janvier 1994 et le 1er janvier 2004.

(iii) En quelle année la population dépassera-t-elle pour la première fois 2 millions ? *[7 points]*

(c) (i) Quel était le nombre moyen de personnes par docteur au début de 1994 ?

(ii) Après combien d'années **complètes** le nombre de personnes par docteur tombera-t-il en-dessous de 600 ? *[5 points]*

SECTION B

*Répondez à **une** question de cette section.*

Méthodes statistiques

6. *[Note maximum : 30]*

(i) Le volume de liquide dans une canette est normalement distribué avec une moyenne de 379 ml et un écart-type de d ml.

(a) Si $d = 2{,}7$, trouvez la probabilité pour qu'une canette contienne moins de 375 ml. *[3 points]*

(b) Quand $d = 3{,}6$, le volume du liquide dépasse x ml dans 90 % des canettes. Trouvez la valeur de x, donnez votre réponse avec un chiffre après la virgule. *[3 points]*

(c) La proportion des canettes dans lesquelles le volume de liquide est inférieur à 370 ml est 0,01. Trouvez la valeur de d. *[4 points]*

(ii) Chaque jour, une usine enregistre le nombre (x) de boîtes qu'elle a produites et le coût de production total (y) dollars. Les résultats sur neuf jours sont donnés dans le tableau suivant.

x	28	45	60	48	51	33	67	40	56
y	460	580	770	600	640	490	830	570	730

(a) Écrivez l'équation de la droite de régression par les moindres carrés de y sur x. *[3 points]*

(b) Dans cette situation, interprétez la signification de

(i) la pente ;

(ii) l'ordonnée à l'origine y. *[2 points]*

(c) Utilisez l'équation trouvée dans la partie (a) pour répondre aux questions suivantes.

(i) Estimez le coût de production de 55 boîtes.

(ii) L'usine vend les boîtes à 13,20 \$ chacune. Trouvez le plus petit nombre de boîtes que l'usine doit produire en un jour pour qu'elle fasse un bénéfice. *[6 points]*

(Suite de la question à la page suivante)

(Suite de la question 6)

(iii) Dans une forêt, la circonférence des arbres au niveau de leur base est normalement distribuée, avec une moyenne de 70 cm et un écart-type de 8 cm.

(a) Les circonférences d'un échantillon de 30 arbres sont mesurées. Trouvez la probabilité que la circonférence moyenne soit supérieure à 72 cm. *[3 points]*

(b) Un autre échantillon doit être sélectionné de telle sorte que la probabilité que sa moyenne se trouve entre 68 et 72 soit supérieure à 0,95. Trouvez la taille minimum de cet échantillon. *[6 points]*

Compléments d'analyse

7. *[Note maximum : 30]*

(i) La fonction g est définie par $g(x) = \dfrac{e^x}{x}, -2 \le x \le 3$.

(a) Faites un croquis de $y = g(x)$, avec $-4 \le y \le 6$. *[2 points]*

(b) (i) Trouvez $g'(x)$.

(ii) À partir de là, calculez les valeurs exactes des coordonnées du point minimum de la courbe de g. *[6 points]*

(c) La dérivée seconde de g est $g''(x) = \dfrac{e^x(x^2 - 2x + 2)}{x^3}$.

Utilisez ce résultat pour expliquer pourquoi la courbe de g ne peut pas avoir de point d'inflexion. *[4 points]*

(ii) ***Note : Dans toute cette partie de la question, on utilise des radians.***

On considère la fonction $f(x) = \sin x + 2x - 1$.

(a) Utilisez la méthode de Newton-Raphson pour résoudre $f(x) = 0$, en partant de $x_0 = 1$. Donnez votre réponse avec sept chiffres significatifs. *[3 points]*

(b) L'équation $f(x) = 0$ peut aussi être résolue en utilisant une itération vers un point fixe, avec $x_{n+1} = \dfrac{1 - \sin x_n}{2}$.

(i) En partant de $x_0 = 1$, écrivez les valeurs de x_1 et de x_2 en donnant vos réponses avec sept chiffres après la virgule.

(ii) Expliquez pourquoi cette itération convergera toujours, quelle que soit la valeur initiale choisie. *[5 points]*

(Suite de la question à la page suivante)

(Suite de la question 7)

(iii) (a) Utilisez la méthode des trapèzes avec deux sous-intervalles pour trouver

$$\int_0^2 9x^2\left(\sqrt{x^3+1}\right)\mathrm{d}x .$$

[4 points]

(b) (i) Utilisez la substitution $u = x^3 + 1$ pour montrer que

$$\int 9x^2\left(\sqrt{x^3+1}\right)\mathrm{d}x = 2\,(x^3+1)^{\frac{3}{2}} + c .$$

(ii) À partir de là, résolvez par rapport à k

$$\int_0^k 9x^2\left(\sqrt{x^3+1}\right)\mathrm{d}x = 594 .$$

[6 points]

Compléments de géométrie

8. *[Note maximum : 30]*

(i) (a) Écrivez les matrices représentant les transformations suivantes.

(i) ***H***, le cisaillement de facteur d'homothétie 2 dans la direction de l'axe des abscisses Ox.

(ii) ***S***, l'affinité de facteur d'homothétie 2 dans la direction de l'axe des ordonnées Oy.

(iii) ***R***, la symétrie par rapport à l'axe des abscisses Ox. *[3 points]*

(b) Donnez une description géométrique complète de chacune des transformations représentées par $\boldsymbol{H}^{-1}$, $\boldsymbol{S}^{-1}$, $\boldsymbol{R}^{-1}$. *[3 points]*

(c) La transformation ***M*** est ***R***, suivie de ***S***, suivie de ***H***.

(i) Exprimez la matrice ***M*** sous forme d'un produit de ***R***, ***S*** et ***H***.

Cela donne $\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

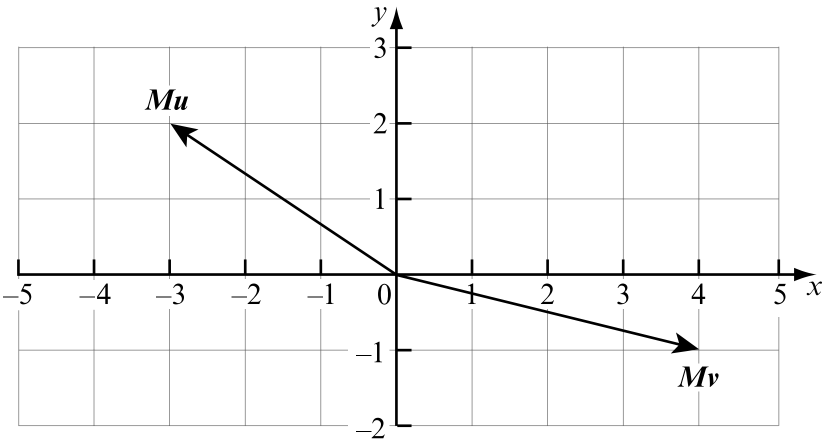
(ii) Trouvez tous les points qui sont invariants par ***M***.

(iii) Trouvez l'image de la droite $y = -x + 2$ par ***M***. *[8 points]*

(Suite de la question à la page suivante)

(Suite de la question 8 (i))

(d) Les vecteurs $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ sont transformés par $\boldsymbol{M}$. Leurs images $\boldsymbol{Mu}$ et $\boldsymbol{Mv}$ sont représentées ci-dessous.



(i) Écrivez les vecteurs colonnes $\boldsymbol{Mu}$ et $\boldsymbol{Mv}$.

(ii) Soit $\boldsymbol{w} = 3\boldsymbol{u} - 2\boldsymbol{v}$. Son image par $\boldsymbol{M}$ est $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Trouvez a et b. *[4 points]*

(ii) La droite L a pour équation $y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}x + 2$. La transformation $\boldsymbol{T}$ est la symétrie axiale par rapport à L et elle peut être exprimée comme

$$\boldsymbol{T}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boldsymbol{F}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

(a) (i) Trouvez la matrice $\boldsymbol{F}$.

(ii) Trouvez le vecteur $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$. *[8 points]*

(b) (i) Montrez que l'image de l'origine $(0; 0)$ par $\boldsymbol{T}$ est $(-\sqrt{3}; 3)$.

(ii) À partir de là calculez la distance orthogonale d de l'origine à L. *[4 points]*