ESTUDIOS MATEMÁTICOS
NIVEL MEDIO
PRUEBA 2

Viernes 7 de mayo de 2004 (mañana)

2 horas

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste las cinco preguntas de la Sección A y una pregunta de la Sección B.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o con tres cifras significativas.
- Escriba la marca y el modelo de su calculadora en el cuadro correspondiente de la portada del examen (p. ej., Casio fx-9750G, Sharp EL-9600, Texas Instruments TI-85).

Empiece una página nueva para cada respuesta. Se recomienda que muestre todos los cálculos, siempre que sea posible. Cuando la respuesta sea incorrecta se otorgarán algunos puntos siempre que aparezca el método empleado y éste sea correcto. Para los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el proceso seguido hasta su obtención. Por ejemplo, cuando deba utilizar gráficas de una calculadora de pantalla gráfica para hallar soluciones, deberá dibujar esas gráficas en su respuesta.

SECCIÓN A

Conteste las ***cinco*** *preguntas de esta sección.*

1. *[Puntuación máxima: 13]*

Las coordenadas de los vértices de un triángulo son $\mathrm{P}(-2;6)$, $\mathrm{Q}(6;2)$ y $\mathrm{R}(-8;a)$.

(a) En papel milimetrado y sobre un sistema de ejes coordenados, marque los puntos P y Q. Utilice 1 cm para representar una unidad en cada eje. *[3 puntos]*

(b) (i) Calcule la distancia PQ. *[2 puntos]*

(ii) Halle la pendiente de la recta PQ. *[3 puntos]*

(iii) Si el ángulo RPQ es un ángulo recto, ¿cuál es la pendiente de la recta PR? *[1 punto]*

(iv) Utilice la respuesta del apartado (b) (iii), o cualquier otro método, para hallar el valor de "a". *[2 puntos]*

(c) La longitud de PR es $\sqrt{180}$. Halle el área del triángulo PQR. *[2 puntos]*

2. *[Puntuación máxima: 13]*

(i) El término n-ésimo de una progresión aritmética viene dado por $u_n = 63 - 4n$.

(a) Calcule los valores de los dos primeros términos de esta progresión. *[2 puntos]*

(b) ¿Qué término de la progresión es –13? *[2 puntos]*

(c) La suma de dos términos consecutivos de la progresión, u_k y u_{k+1} es 34. Halle k. *[3 puntos]*

(ii) Se deja caer verticalmente una pelota de baloncesto. En el primer bote alcanza una altura de 2 m. La altura de cada uno de los botes posteriores es el 90 % de la anterior.

(a) ¿Qué altura alcanzará en el 8º bote? *[2 puntos]*

(b) ¿Cuál es la longitud total de la distancia vertical recorrida por la pelota entre la primera y la sexta vez que toca el suelo? *[4 puntos]*

3. *[Puntuación máxima: 16]*

La tabla que aparece a continuación muestra el número y el peso (w) de los pescados distribuidos una mañana en un mercado municipal.

peso (kg)	**frecuencias**	**frecuencias acumuladas**
$0{,}50 \le w < 0{,}70$	16	16
$0{,}70 \le w < 0{,}90$	37	53
$0{,}90 \le w < 1{,}10$	44	c
$1{,}10 \le w < 1{,}30$	23	120
$1{,}30 \le w < 1{,}50$	10	130

(a) (i) Escriba el valor de c. *[1 punto]*

(ii) Dibuje en papel milimetrado la *curva de frecuencias acumuladas* de estos datos. Utilice una escala de 1 cm para representar 0,1 kg en el eje horizontal, y de 1 cm para representar 10 unidades en el eje vertical. Rotule claramente los ejes. *[4 puntos]*

(iii) Utilice esta gráfica para comprobar que la mediana del peso de los pescados es 0,95 kg. *[1 punto]*

(b) (i) El zoo compra todos los pescados con un peso por encima del percentil 90. ¿Cuántos pescados compra el zoo? *[2 puntos]*

(ii) Una empresa de comida para mascotas compra todos los pescados del cuartil inferior. ¿Cuál es el peso máximo de los pescados que compra esta empresa? *[3 puntos]*

(c) Un restaurante compra todos los pescados cuyos pesos se encuentran dentro de 10 % del peso de la mediana.

(i) Calcule el peso máximo y mínimo de los pescados que compra el restaurante. *[2 puntos]*

(ii) Use la gráfica para determinar cuántos pescados comprará el restaurante. *[3 puntos]*

4. *[Puntuación máxima: 15]*

En un estante hay dos cajas de galletas. La caja **roja** contiene tres galletas de chocolate (C) y siete galletas simples (P). La caja **azul** contiene una galleta de chocolate y nueve galletas simples.

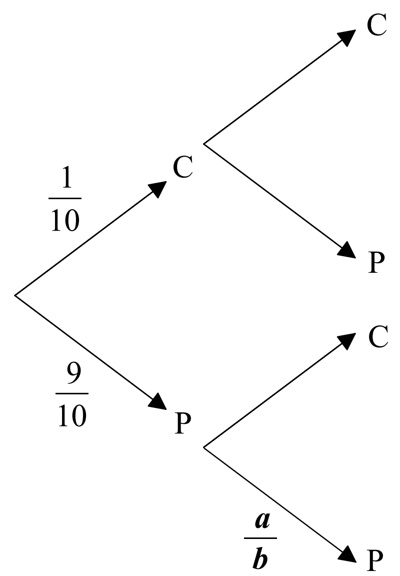
(a) Un niño alcanza la caja **roja** y toma una galleta al azar. Después vuelve a colocar la galleta dentro de la caja, agita la caja y toma otra galleta.

Halle la probabilidad de que

(i) las dos galletas seleccionadas sean de chocolate. *[2 puntos]*

(ii) una de las galletas sea simple y la otra de chocolate. *[3 puntos]*

(b) Un segundo niño toma una galleta de la caja **azul**. Después de comérsela, toma otra de la misma caja. Los posibles resultados de este experimento se representan en el diagrama de árbol que aparece a continuación.



(i) Escriba los valores de $\boldsymbol{a}$ y de $\boldsymbol{b}$. *[2 puntos]*

(ii) Halle la probabilidad de que las dos galletas sean de chocolate. *[1 punto]*

(iii) ¿Cuál es la probabilidad de que **al menos** una de las galletas sea de chocolate? *[3 puntos]*

(c) Supongamos que antes de la llegada de los dos niños, su hermano eligió al azar una caja de galletas y tomó una.

Calcule la probabilidad de que la galleta haya sido de chocolate. *[4 puntos]*

5. *[Puntuación máxima: 13]*

Una panadería del barrio elabora dos tipos de pasteles. La masa de los pasteles *extra* lleva 25 gramos de nueces y 75 gramos de fruta. La masa de los pasteles *normales* lleva 50 gramos de frutos secos y 50 gramos de fruta.

La panadería sólo dispone de 3,6 kg de nueces y 6 kg de fruta. Esta información viene representada en la tabla que aparece a continuación.

El número de pasteles de tipo *extra* que se pueden elaborar se representa por x, y el número de pasteles *normales* por y.

Producto	**Nueces**	**Fruta**
x	25 g	75 g
y	50 g	50 g
Cantidad disponible	3600 g	6000 g

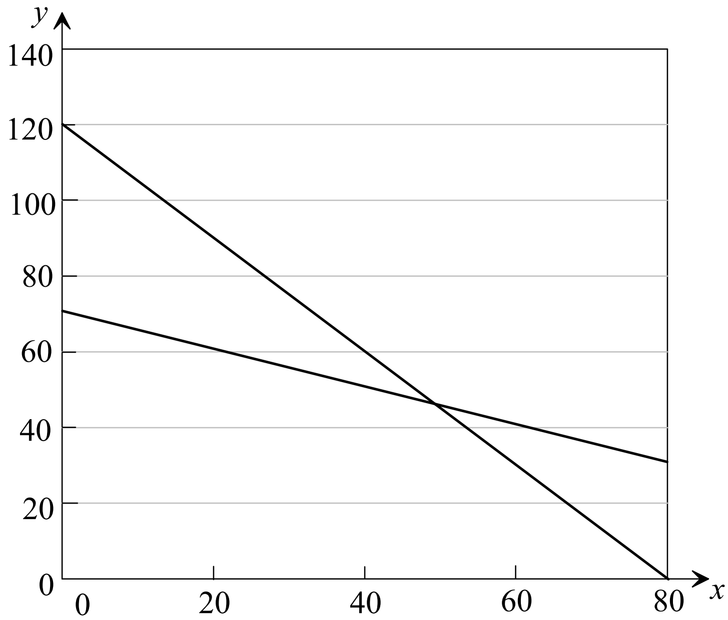
El panadero utiliza esta información para establecer las siguientes inecuaciones.

(1)… $x+2y \le 144$ (3)… $x \ge 0$

(2)… $3x+2y \le 240$ (4)… $y \ge 0$

(a) Explique cómo ha determinado el panadero la inecuación (1). *[2 puntos]*

El panadero traza después las gráficas de $x+2y=144$ y $3x+2y=240$ según se muestra a continuación.



(b) Las inecuaciones anteriores definen una cierta región de este gráfico. Escriba las coordenadas de los vértices de la misma. *[4 puntos]*

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 5: continuación)

El panadero sabe que puede obtener el máximo beneficio utilizando los vértices de la región anterior. Por cada pastel de tipo *extra* obtiene un beneficio de 75 centavos, y por cada pastel de tipo *normal* $ 1,10 .

(c) Halle el beneficio máximo. *[2 puntos]*

Cuando el panadero había terminado de realizar sus cálculos, un cliente hizo un pedido de 60 pasteles *normales*. El panadero sirvió este pedido y utilizó los ingredientes que le sobraron para hacer pasteles tipo *extra*.

(d) (i) Calcule la cantidad de nueces y de fruta que utilizó para el pedido. *[1 punto]*

(ii) Calcule el número de pasteles tipo *extra* que pudo elaborar. *[2 puntos]*

(iii) ¿Cuál será el nuevo beneficio? *[2 puntos]*

SECCIÓN B

*Conteste **una** pregunta de esta sección.*

Matrices y teoría de grafos

6. *[Puntuación máxima: 30]*

(i) En baloncesto, un jugador puede conseguir puntos mediante un tiro desde el perímetro, un tiro dentro de la zona o un tiro libre. En los últimos cuatro partidos, un jugador ha realizado con éxito los siguientes tiros.

	Partido 1	Partido 2	Partido 3	Partido 4
Perímetro	3	2	2	3
Zona	5	x	5	$2x$
Libre	2	1	1	4

(a) Lleve estos datos a una matriz 4×3. Rotule claramente la matriz. *[2 puntos]*

(b) Un tiro desde el perímetro vale tres puntos, dentro de la zona dos puntos y cada tiro libre un punto. Escriba esta información en forma de matriz 3×1. *[1 punto]*

(c) Multiplicando las dos matrices, halle el total de puntos obtenidos por este jugador en cada uno de los cuatro partidos. Algunos de los resultados habrán de expresarse en función de x. *[2 puntos]*

(d) Si el jugador ha obtenido un total de 82 puntos entre los cuatro partidos, halle el valor de x. *[2 puntos]*

(ii) Sean $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & y \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 14 & 12 \\ 4 & 11 \end{pmatrix}$.

(a) Escriba el determinante de la matriz $\boldsymbol{A}$. *[1 punto]*

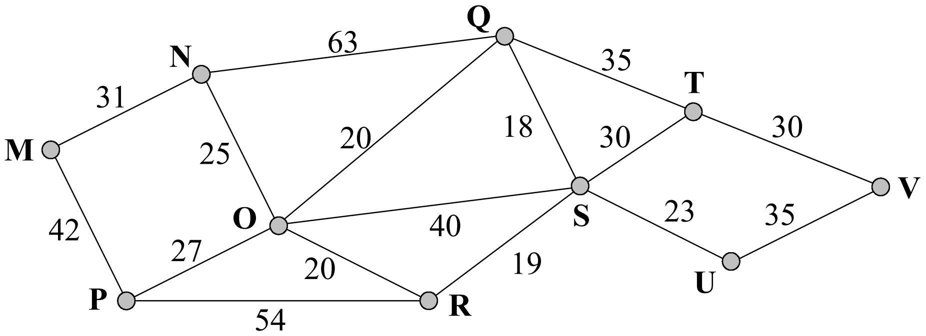
(b) ¿Para qué valor de y no existe la matriz inversa de $\boldsymbol{A}$? *[2 puntos]*

(c) Calcule el valor de y si $2\boldsymbol{A} + 3\boldsymbol{I} = \frac{1}{2}\boldsymbol{B}$. *[3 puntos]*

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 6: continuación)

(iii) El siguiente grafo corresponde a la descripción de la red de carreteras de una región. El gobierno regional desea mejorar la carretera que conecta las ciudades **M**, **S** y **V**, y pretende gastar la menor cantidad de dinero posible. Los números dados indican el costo (en millones de dólares) requerido para reconstruir cada sección.



(a) (i) Escriba una ruta que satisfaga los requisitos del gobierno. *[2 puntos]*

(ii) ¿Cuál sería el costo total si se utiliza esa ruta? *[1 punto]*

(b) Se descubrió que el costo para mejorar la sección de carretera entre **O** y **Q** se había subestimado en 2 millones de dólares.

(i) ¿Cuál es ahora la ruta que satisface los requisitos del gobierno? *[1 punto]*

(ii) ¿Qué costo adicional supone? *[2 puntos]*

(c) Dibuje y rotule un **árbol** que genere todos los vértices del grafo. *[2 puntos]*

(d) ¿Cuántos vértices de grado par existen en el árbol? *[1 punto]*

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 6: continuación)

(iv) Jack y Jill juegan a un juego de suma nula de dos personas. La matriz de pagos que aparece a continuación muestra las cantidades que ganará Jack en cada juego.

Jill

	2	–1	–5	–4
Jack	1	2	0	1
	–5	1	–2	2

(a) ¿Cuál es la mejor fila para Jack si Jill elige la columna 4? *[1 punto]*

(b) ¿Qué resultado obtiene Jill si sabe que Jack jugará la fila 3 y ella elige su mejor opción? *[2 puntos]*

(c) Una estrategia segura es aquella que garantiza que un jugador perderá la menor cantidad de dinero.

(i) ¿Qué fila debe elegir siempre Jack para jugar seguro? *[2 puntos]*

(ii) Si tanto Jack como Jill jugaran seguro, ¿cuál sería el resultado? *[2 puntos]*

(d) Explique por qué este juego es justo. *[1 punto]*

Extensión de estadística y probabilidad

7. *[Puntuación máxima: 30]*

(i) El peso de los gatos sigue una distribución normal en torno a un peso medio de 3,42 kg con una desviación típica de 0,82 kg.

El veterinario municipal ha recolectado datos sobre 150 gatos que han pasado por la consulta.

(a) (i) Escriba el porcentaje de gatos cuyos pesos estarán dentro de una desviación típica respecto a la media. *[1 punto]*

(ii) ¿Cuántos de los gatos que han estado en la consulta tendrán un peso dentro de una desviación típica respecto a la media? *[2 puntos]*

(b) (i) En un diagrama adecuado con forma de campana, sombree el área correspondiente a todos los gatos que pesan menos de 2 kg. *[1 punto]*

(ii) Calcule el valor de la variable normal estandarizada z, correspondiente a 2 kg. *[2 puntos]*

(iii) ¿Qué porcentaje de gatos pesará menos de 2 kg? *[2 puntos]*

(c) Calcule el porcentaje de gatos que pesará entre 2 kg y 4,8 kg. *[3 puntos]*

(d) La probabilidad de que un gato pese más de w kg es del 2,5 %. Halle w. *[3 puntos]*

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 7: continuación)

(ii) El veterinario ha reunido los siguientes datos sobre el peso de los perros y de sus cachorros.

		Perro		**Total**
		Pesado	Liviano	
	Pesado	36	27	63
Cachorro	Liviano	22	35	57
	Total	58	62	120

El veterinario desea comprobar las siguientes hipótesis.

H_0 : El peso de un cachorro es independiente del peso de cualquiera de sus padres.
H_1 : El peso de un cachorro está relacionado con el peso de cualquiera de sus padres.

(a) La tabla inferior ofrece los elementos necesarios para el cálculo del valor de χ^2 para estos datos.

	f_o	f_e	$f_e - f_o$	$(f_e - f_o)^2$	$(f_e - f_o)^2 / f_e$
pesado/pesado	36	30,45	–5,55	30,8025	1,012
pesado/liviano	27	32,55	5,55	30,8025	0,946
liviano/pesado	22	27,55	5,55	30,8025	1,118
liviano/liviano	35	*a*	*b*	*c*	*d*

(i) Escriba los valores de *a*, *b*, *c* y *d*. *[4 puntos]*

(ii) ¿Cuál es el valor de χ^2_{calc} para estos datos? *[1 punto]*

(iii) ¿Cuántos grados de libertad tiene la tabla de contingencia? *[1 punto]*

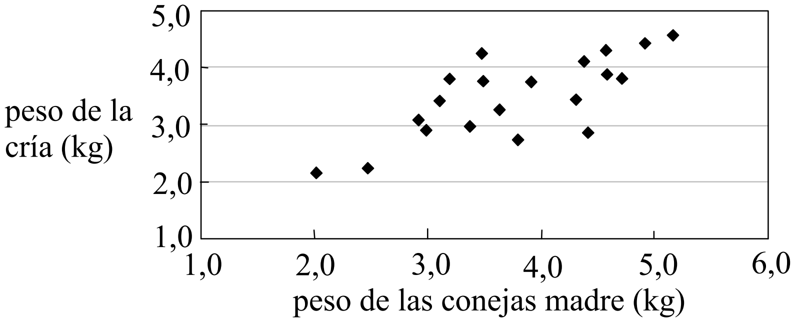
(iv) Indique el valor crítico de χ^2 para el nivel de significación del 5 %. *[1 punto]*

(b) ¿Debe aceptarse H_0? Explique por qué. *[2 puntos]*

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 7: continuación)

(iii) Se llevó a cabo un estudio para investigar posibles relaciones entre los pesos de la cría de los conejos y el de las conejas madre. Una muestra de 20 pares de conejas madre y cría de conejo fue eligida al azar, anotando sus pesos, que se los llamó x e y respectivamente. Esta información fue representada en un diagrama de dispersión y algunos cálculos estadísticos fueron realizados. Todo esto se muestra a continuación.



media de x	media de y	s_x	s_y	s_{xy}	suma de x	suma de y
3,78	3,46	0,850	0,689	0,442	75,6	69,2

(a) Compruebe que el coeficiente de correlación momento-producto r para estos datos es 0,755. *[2 puntos]*

(b) (i) Escriba la ecuación de la recta de regresión de y sobre x en la forma $y = ax + b$. *[3 puntos]*

(ii) Utilice la ecuación anterior para estimar el peso de un conejo, sabiendo que su madre pesa 3,71 kg. *[2 puntos]*

Introducción al cálculo diferencial

8. *[Puntuación máxima: 30]*

(i) La altura (cm) de un narciso desde el suelo viene dada por la función $h(w) = 24w - 2{,}4w^2$, donde w es el tiempo en semanas desde que la planta aparece en la superficie $(w \geq 0)$.

(a) Calcule la altura del narciso a las dos semanas. *[2 puntos]*

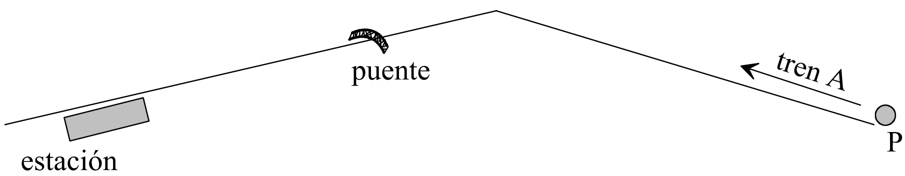
(b) (i) Halle la tasa de crecimiento, $\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}w}$. *[2 puntos]*

(ii) La tasa de crecimiento cuando $w = k$ es 7,2 cm por semana. Halle k. *[3 puntos]*

(iii) ¿Cuándo alcanzará el narciso su altura máxima? ¿Qué altura alcanzará? *[4 puntos]*

(c) Una vez que el narciso alcanza su altura máxima, empieza a doblarse hacia el suelo. Compruebe que tocará el suelo a los 70 días. *[3 puntos]*

(ii) Un tren en miniatura se mueve hacia la estación a lo largo de la siguiente ruta.



Cuando el tren A se encuentra en P, se desconecta la corriente. A partir de ese momento, el desplazamiento del tren A respecto a la estación (en metros) viene dado por la función

$$S(t) = -t^3 + 3t^2 - 3t + 2 \quad (t \text{ en segundos}, 0 \leq t \leq 3).$$

Por ejemplo, $S(0{,}5) = 1{,}125$ significa que el tren A, 0,5 segundos después de que la corriente se desconecte, se encuentra a 1,125 metros a la derecha de la estación.

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 8 (ii): continuación)

(a) La siguiente tabla muestra el desplazamiento del tren A respecto a la estación en momentos dados.

Tiempo (seg)	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5
Desplazamiento (m)	a	1,125	1,0	0,875	b	–2,375

(i) Halle los valores de a y b. *[2 puntos]*

(ii) Interprete el valor de $S(t)$ cuando $t = 2{,}5$ segundos. *[1 punto]*

(b) La velocidad del tren A viene dada por $v(t) = S'(t) = \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}$.

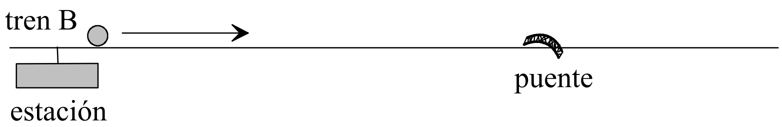
(i) Halle $v(t)$. *[1 punto]*

(ii) ¿Cuál es la velocidad del tren A cuando se desconecta la corriente? *[2 puntos]*

(iii) Compruebe que, cuando el tren A se para momentáneamente, $t = 1$. *[2 puntos]*

(iv) El tren A pasa bajo el puente 1,6 segundos después de que se haya desconectado la corriente. ¿Qué velocidad lleva? *[2 puntos]*

(iii)



El **tren B** se mueve en sentido contrario al tren A según la ruta que se muestra. El **tren B** se aproxima al puente a una velocidad definida por la función

$$u(t) = 2t + 1{,}5\ (\mathrm{m\,s^{-1}}) \qquad (t \text{ segundos}, 0 \le t \le 3).$$

El desplazamiento del tren B respecto a la estación se puede hallar por la función $R(t)$ que es una primitiva de $u(t)$.

(a) Después de 1 segundo, el tren B se encuentra a 0,5 m a la derecha de la estación. Halle $R(t)$. *[4 puntos]*

(b) ¿A cuántos metros de la estación se encuentra el tren B después de 1,6 segundos? *[2 puntos]*