IB DIPLOMA PROGRAMME
PROGRAMME DU DIPLÔME DU BI
PROGRAMA DEL DIPLOMA DEL BI

ÉTUDES MATHÉMATIQUES
NIVEAU MOYEN
ÉPREUVE 2

Vendredi 7 mai 2004 (matin)

2 heures

INSTRUCTIONS DESTINÉES AUX CANDIDATS

- N'ouvrez pas cette épreuve avant d'y être autorisé.
- Répondez à toutes les questions de la section A et à une question de la section B.
- Sauf indication contraire dans l'intitulé de la question, les réponses numériques devront être exactes ou à trois chiffres significatifs près.
- Veuillez indiquer la marque et le modèle de votre calculatrice dans les cases appropriées sur la page de couverture (par exemple, Casio *fx-9750G*, Sharp EL-9600, Texas Instruments TI-85).

Veuillez répondre à chaque question sur une nouvelle page. On vous recommande d'indiquer votre raisonnement autant que possible. Lorsque la réponse est fausse, certains points seront accordés si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. Les solutions obtenues à l'aide de calculatrices à écran graphique doivent être accompagnées d'un raisonnement adéquat. Par exemple, si des graphiques sont utilisés pour trouver la solution, veuillez inclure un croquis de ces graphes dans votre réponse.

SECTION A

*Répondez aux **cinq** questions de cette section.*

1. *[Note maximum : 13]*

Les coordonnées des sommets d'un triangle sont $\mathrm{P}(-2;6), \mathrm{Q}(6;2)$ et $\mathrm{R}(-8;a)$.

(a) Sur du papier millimétré, placez les points P et Q sur un repère. Vous prendrez 1 cm pour représenter 1 unité sur chacun des axes. *[3 points]*

(b) (i) Calculez la distance PQ. *[2 points]*

(ii) Déterminez la pente de la droite (PQ). *[3 points]*

(iii) Si l'angle RPQ est un angle droit, quelle est la pente de la droite (PR) ? *[1 point]*

(iv) En utilisant votre réponse de (b)(iii), ou autrement, trouvez la valeur de 'a'. *[2 points]*

(c) La longueur de PR est $\sqrt{180}$. Trouvez l'aire du triangle PQR. *[2 points]*

2. *[Note maximum : 13]*

(i) Le $n^{\text{ième}}$ terme d'une suite arithmétique est donné par $u_n = 63 - 4n$.

(a) Calculez les valeurs des deux premiers termes de cette suite. *[2 points]*

(b) Quel terme de cette suite est –13 ? *[2 points]*

(c) Deux termes consécutifs de cette suite, u_k et u_{k+1} , ont une somme égale à 34. Trouvez k. *[3 points]*

(ii) Un ballon de basket est lâché verticalement. Au premier rebond il atteint une hauteur de 2 m. La hauteur de chacun des rebonds suivants est 90 % du rebond précédent.

(a) Quelle hauteur atteint-il au $8^{\text{ème}}$ rebond ? *[2 points]*

(b) Quelle est la distance verticale totale parcourue par le ballon entre la première fois et la sixième fois qu'il touche le sol ? *[4 points]*

3. *[Note maximum : 16]*

Le tableau ci-dessous présente les poids (w) et les nombres de poissons livrés un matin à un marché de quartier.

poids (kg)	**effectifs**	**effectifs cumulés**
$0{,}50 \le w < 0{,}70$	16	16
$0{,}70 \le w < 0{,}90$	37	53
$0{,}90 \le w < 1{,}10$	44	c
$1{,}10 \le w < 1{,}30$	23	120
$1{,}30 \le w < 1{,}50$	10	130

(a) (i) Donnez la valeur de c. *[1 point]*

(ii) Sur du papier millimétré, tracez la *courbe des effectifs cumulés* pour ces données. Utilisez une échelle de 1 cm pour représenter 0,1 kg sur l'axe horizontal et 1 cm pour représenter 10 unités sur l'axe vertical. Légendez les axes clairement. *[4 points]*

(iii) Utilisez votre courbe pour montrer que le poids médian des poissons est 0,95 kg. *[1 point]*

(b) (i) Le zoo achète tous les poissons dont le poids est au-dessus du $90^{\text{ème}}$ centile. Combien de poissons le zoo achète-t-il ? *[2 points]*

(ii) Une entreprise de nourriture pour animaux domestiques achète tous les poissons du quartile inférieur. Quel est le poids maximum d'un poisson acheté par cette entreprise ? *[3 points]*

(c) Un restaurant achète tous les poissons qui sont à moins de 10 % du poids médian.

(i) Calculez les poids minimum et maximum des poissons achetés par le restaurant. *[2 points]*

(ii) Utilisez votre courbe pour déterminer combien de poissons vont être achetés par le restaurant. *[3 points]*

4. *[Note maximum : 15]*

Il y a deux boîtes à gâteaux sur une étagère. La boîte **rouge** contient trois biscuits au chocolat (C) et sept biscuits ordinaires (P). La boîte **bleue** contient un biscuit au chocolat et neuf biscuits ordinaires.

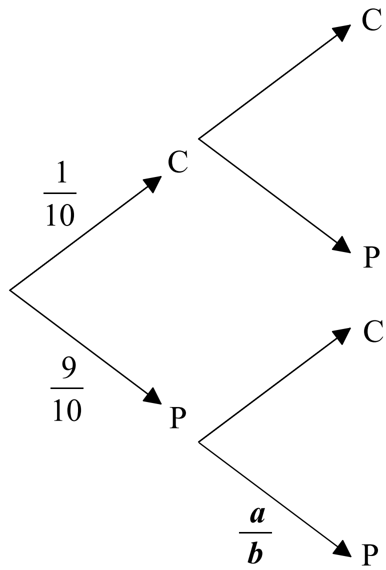
(a) Un enfant parvient à la boîte **rouge** et choisit au hasard un biscuit. L'enfant remet ce biscuit dans la boîte, secoue la boîte, puis reprend un autre biscuit.

Trouvez la probabilité que

(i) les deux biscuits choisis sont au chocolat. *[2 points]*

(ii) l'un des deux biscuits est un biscuit ordinaire et l'autre est au chocolat. *[3 points]*

(b) Un deuxième enfant choisit un biscuit de la boîte **bleue**. L'enfant mange le biscuit et en choisit un autre de la boîte **bleue**. Le schéma en arbre ci-dessous représente les résultats possibles de cette expérience.



(i) Écrivez les valeurs de $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$. *[2 points]*

(ii) Trouvez la probabilité que les deux biscuits soient au chocolat. *[1 point]*

(iii) Trouvez la probabilité qu'**au moins** l'un des biscuits soit au chocolat ? *[3 points]*

(c) On suppose qu'avant que les deux enfants n'arrivent, leur frère ait choisi au hasard l'une des boîtes à gâteaux et ait pris un biscuit.

Calculez la probabilité que ce biscuit soit au chocolat. *[4 points]*

5. *[Note maximum : 13]*

Une pâtisserie de quartier produit deux types de gâteaux. Chaque gâteau *Triplet* contient 25 grammes de noix et 75 grammes de fruits dans sa composition. Chaque gâteau *Égalité* contient 50 grammes de noix et 50 grammes de fruits.

La pâtisserie dispose de seulement 3,6 kg de noix et de 6 kg de fruits. Ces informations sont données dans le tableau ci-dessous.

Le nombre de gâteaux *Triplet* qui pourraient être produits est représenté par x, et le nombre de gâteaux *Égalité* par y.

Produit	**Noix**	**Fruits**
x	25 g	75 g
y	50 g	50 g
Quantité disponible	3600 g	6000 g

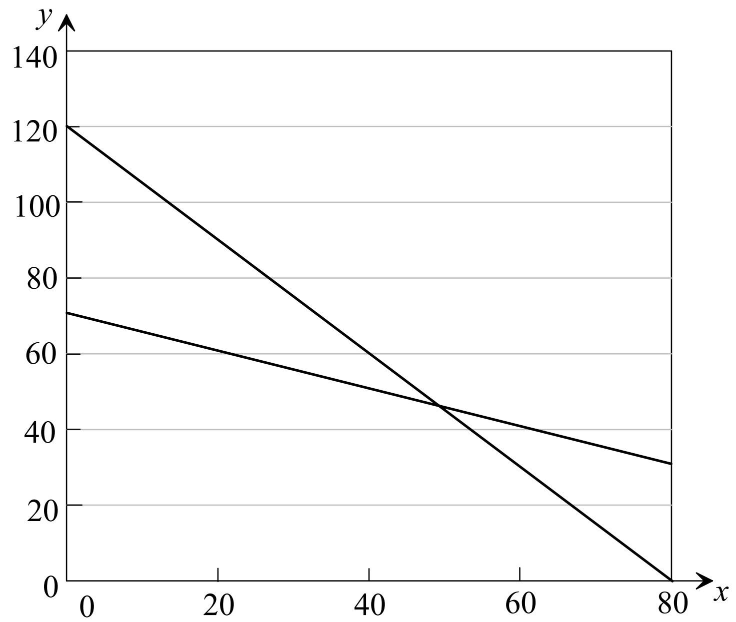
Le pâtissier utilise ces informations pour établir les inéquations suivantes.

(1)… $x + 2y \le 144$ (3)… $x \ge 0$

(2)… $3x + 2y \le 240$ (4)… $y \ge 0$

(a) Expliquez comment le pâtissier a déterminé l'inéquation (1). *[2 points]*

Le pâtissier a ensuite tracé les représentations graphiques de $x + 2y = 144$ et de $3x + 2y = 240$ comme dans la figure ci-dessous.



(b) Les inéquations ci-dessus définissent une certaine région du plan. Écrivez les coordonnées des sommets de cette région. *[4 points]*

(Suite de la question à la page suivante)

(Suite de la question 5)

Le pâtissier sait que le profit maximum peut être obtenu en utilisant les sommets de la région ainsi définie. La pâtisserie fait un profit de 75 cents sur chaque gâteau *Triplet* et un profit de 1,10 $ sur chaque gâteau *Égalité*.

(c) Déterminez le profit maximum. *[2 points]*

Juste après que le pâtissier ait achevé ces calculs, un client a passé une commande de 60 gâteaux *Égalité*. Le pâtissier a préparé cette commande et a utilisé le reste des ingrédients pour faire des gâteaux *Triplet*.

(d) (i) Calculez la quantité de noix et de fruits utilisée pour les gâteaux *Égalité*. *[1 point]*

(ii) Calculez le nombre de gâteaux *Triplet* qui pourront être fabriqués. *[2 points]*

(iii) Quel pourra être le nouveau profit ? *[2 points]*

SECTION B

*Répondez à **une** question de cette section.*

Matrices et théorie des graphes

6. *[Note maximum : 30]*

(i) En basket, un joueur peut marquer un tir de loin, un tir de près, ou un lancer franc. Au cours des quatre derniers matchs, un joueur a réussi à marquer les tirs suivants.

	Match 1	Match 2	Match 3	Match 4
Tir de loin	3	2	2	3
Tir de près	5	x	5	$2x$
Lancer franc	2	1	1	4

(a) Transcrivez les données des matchs dans une matrice 4×3. Légendez cette matrice clairement. *[2 points]*

(b) Un tir de loin vaut trois points; un tir de près deux points et il y a un point pour chaque lancer franc. Écrivez ces informations dans une matrice 3×1. *[1 point]*

(c) En multipliant les deux matrices, trouvez le nombre total de points marqués par ce joueur dans chacun des quatre matchs. Certaines entrées devront être écrites en fonction de x. *[2 points]*

(d) Si le joueur a marqué un total de 82 points sur les quatre matchs, trouvez la valeur de x. *[2 points]*

(ii) Soit $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & y \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 14 & 12 \\ 4 & 11 \end{pmatrix}$.

(a) Écrivez le déterminant de la matrice $\boldsymbol{A}$. *[1 point]*

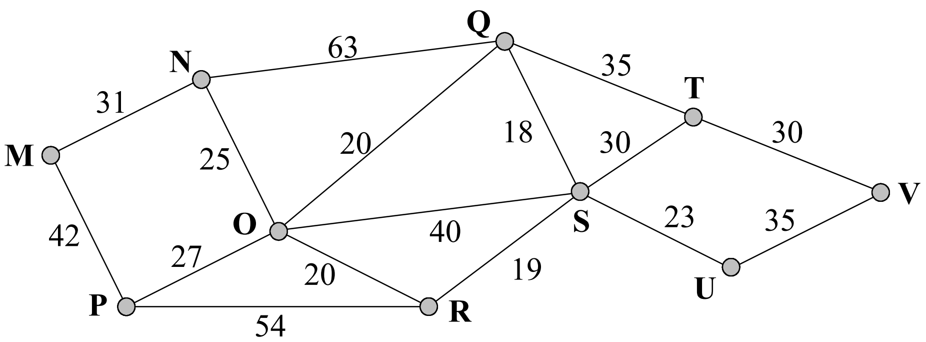
(b) Pour quelle valeur de y l'inverse de la matrice $\boldsymbol{A}$ n'existe-t-il pas ? *[2 points]*

(c) Calculez la valeur de y quand $2\boldsymbol{A} + 3\boldsymbol{I} = \frac{1}{2}\boldsymbol{B}$. *[3 points]*

(Suite de la question à la page suivante)

(Suite de la question 6)

(iii) Le graphe suivant décrit un réseau régional de routes. Le conseil régional veut rénover la route qui relie les villes **M**, **S**, et **V**, et souhaite dépenser la plus petite somme possible d'argent. Les nombres donnés représentent le coût (en millions de $) des travaux routiers nécessaires pour chaque section.



(a) (i) Écrivez un itinéraire qui satisfait les demandes du conseil régional. *[2 points]*

(ii) Quel serait le coût total pour rénover cet itinéraire ? *[1 point]*

(b) On s'aperçoit que le coût de la rénovation de la section de route entre les villes **O** et **Q** a été sous-estimé de 2 millions de $.

(i) Quel itinéraire satisfait maintenant les demandes du conseil régional ? *[1 point]*

(ii) Quel coût supplémentaire est alors impliqué ? *[2 points]*

(c) Dessinez et légendez un **arbre** qui couvre tous les sommets de ce graphe. *[2 points]*

(d) Combien y-a-t-il de sommets de degré pair dans ce graphe ? *[1 point]*

(Suite de la question à la page suivante)

(Suite de la question 6)

(iv) Jack et Jill jouent un jeu à deux personnes, de somme nulle. La matrice des gains ci-dessous montre les points que Jack peut gagner à chaque coup.

	Jill			
	2	–1	–5	–4
Jack	1	2	0	1
	–5	1	–2	2

(a) Quel est le meilleur choix de ligne pour Jack si Jill choisit la colonne 4 ? *[1 point]*

(b) Quel sera le résultat pour Jill si elle sait que Jack va jouer la ligne 3 et qu'elle choisit sa meilleure option ? *[2 points]*

(c) La stratégie prudente est celle qui garantit à un joueur de perdre la somme d'argent la plus faible.

(i) Quelle ligne Jack devrait-il toujours choisir pour suivre une stratégie prudente ? *[2 points]*

(ii) Si Jack et Jill jouaient prudemment tous les deux, quel serait le résultat ? *[2 points]*

(d) Expliquez pourquoi ce jeu est équilibré. *[1 point]*

Compléments de statistiques et probabilités

7. *[Note maximum : 30]*

(i) Le poids des chats suit une distribution normale avec une moyenne de 3,42 kg et avec un écart-type de 0,82 kg.

Le vétérinaire du quartier a rassemblé des données sur 150 chats qui sont passés par son cabinet chirurgical.

(a) (i) Écrivez le pourcentage de chats dont le poids est à moins de 1 écart-type de la moyenne. *[1 point]*

(ii) Combien de chats parmi ceux qui sont passés par le cabinet chirurgical ont un poids à moins de 1 écart-type de la moyenne ? *[2 points]*

(b) (i) Sur une courbe "en cloche" convenable, hachurez la zone correspondant à tous les chats de moins de 2 kg. *[1 point]*

(ii) Calculez la valeur normale réduite z correspondant à 2 kg. *[2 points]*

(iii) Quel est le pourcentage de chats qui pèsent moins de 2 kg ? *[2 points]*

(c) Calculez le pourcentage de chats dont le poids est entre 2 kg et 4,8 kg. *[3 points]*

(d) La probabilité qu'un chat pèse plus de w kg est 2,5 %. Trouvez w. *[3 points]*

(Suite de la question à la page suivante)

(Suite de la question 7)

(ii) Le vétérinaire a collecté les données suivantes concernant les poids des chiens et les poids de leurs chiots.

		Chien		**Total**
		Gros	Petit	
	Gros	36	27	63
Chiot	Petit	22	35	57
	Total	58	62	120

Le vétérinaire souhaite tester les hypothèses suivantes.

H_0 : Le poids d'un chiot est indépendant du poids de son parent.
H_1 : Le poids d'un chiot est en rapport avec le poids de son parent.

(a) Le tableau ci-dessous présente les éléments nécessaires au calcul de la valeur du χ^2 pour ces données.

	f_o	f_e	$f_e - f_o$	$(f_e - f_o)^2$	$(f_e - f_o)^2 / f_e$
gros/gros	36	30,45	–5,55	30,8025	1,012
gros/petit	27	32,55	5,55	30,8025	0,946
petit/gros	22	27,55	5,55	30,8025	1,118
petit/petit	35	*a*	*b*	*c*	*d*

(i) Écrivez les valeurs de *a*, *b*, *c*, et *d*. *[4 points]*

(ii) Quelle est la valeur du χ^2_{calc} pour ces données ? *[1 point]*

(iii) Combien y a-t-il de degrés de liberté pour ce tableau de contingence ? *[1 point]*

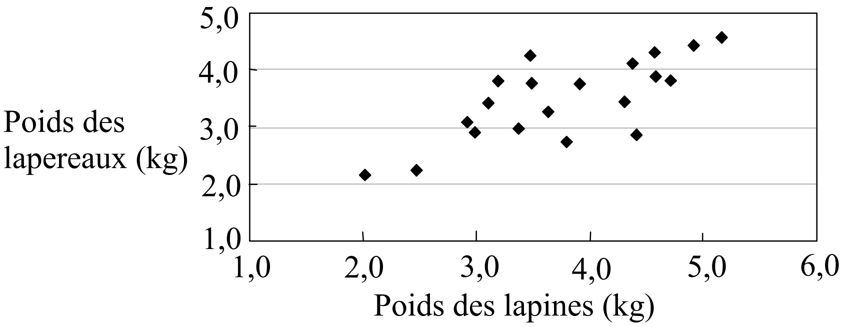
(iv) Écrivez la valeur critique du χ^2 pour un seuil de signification de 5 %. *[1 point]*

(b) L'hypothèse H_0 doit-elle être acceptée ? Expliquez pourquoi. *[2 points]*

(Suite de la question à la page suivante)

(Suite de la question 7)

(iii) Une étude a été menée pour rechercher les liens possibles entre le poids de lapereaux et celui des lapines leurs mères. Un échantillon de 20 paires de mères lapines et de lapereaux a été choisi au hasard, leur poids a été noté et appelé x pour les lapines, y pour les lapereaux. Ces informations sont notées sous forme d'un nuage de points et divers calculs statistiques ont été faits. Les voici ci-dessous.



moyenne de x	moyenne de y	s_x	s_y	s_{xy}	somme des x	somme des y
3,78	3,46	0,850	0,689	0,442	75,6	69,2

(a) Montrez que le coefficient de corrélation r pour ces données est de 0,755. *[2 points]*

(b) (i) Écrivez l'équation de la droite de régression de y sur x sous la forme $y = ax + b$. *[3 points]*

(ii) Utilisez l'équation de la droite de régression pour estimer le poids d'un lapereau étant donné que sa mère pèse 3,71 kg. *[2 points]*

Introduction à l'analyse différentielle

8. *[Note maximum : 30]*

(i) La hauteur (cm) par rapport au sol d'une jonquille est donnée par la fonction $h(w) = 24w - 2{,}4w^2$, où w est le temps en semaines mesuré à partir du moment où la plante est sortie de terre $(w \geq 0)$.

(a) Calculez la hauteur de la jonquille au bout de deux semaines. *[2 points]*

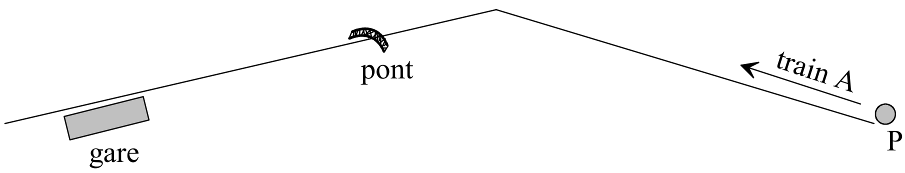
(b) (i) Trouvez le taux de croissance, $\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}w}$. *[2 points]*

(ii) Le taux de croissance lorsque $w = k$ est 7,2 cm par semaine. Trouvez k. *[3 points]*

(iii) Quand la jonquille atteindra-t-elle sa hauteur maximum ? Quelle hauteur atteindra-t-elle ? *[4 points]*

(c) Une fois que la jonquille a atteint sa hauteur maximum, elle commence à retomber vers le sol. Montrer qu'elle va toucher le sol après 70 jours. *[3 points]*

(ii) Un train modèle réduit roule vers une gare le long du trajet représenté ici.



Le courant électrique est coupé au moment où le train A est en P. La position du train A par rapport à la gare (en mètres) est donnée par la fonction

$$S(t) = -t^3 + 3t^2 - 3t + 2 \quad (t \text{ en secondes}, 0 \leq t \leq 3).$$

Par exemple, $S(0{,}5) = 1{,}125$ signifie que le train A est à 1,125 mètres à droite de la gare 0,5 secondes après que le courant ait été coupé.

(Suite de la question à la page suivante)

(Suite de la question 8 (ii))

(a) Le tableau ci-dessous montre la position du train A par rapport à la gare aux instants donnés.

Temps (s)	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5
Position (m)	a	1,125	1,0	0,875	b	–2,375

(i) Trouvez les valeurs de a et b. *[2 points]*

(ii) Interprétez la valeur de $S(t)$ quand $t = 2{,}5$ secondes. *[1 point]*

(b) La vitesse du train A est donnée par $v(t) = S'(t) = \dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}$.

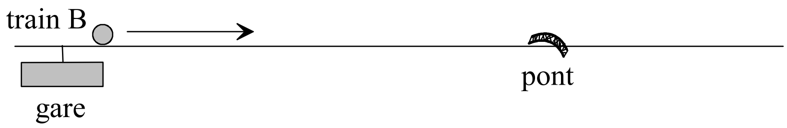
(i) Trouvez $v(t)$. *[1 point]*

(ii) Quelle est la vitesse du train A quand le courant électrique est coupé ? *[2 points]*

(iii) Montrez que, quand le train A est momentanément à l'arrêt, $t = 1$. *[2 points]*

(iv) Le train A passe sous le pont 1,6 secondes après que le courant ait été coupé. À quelle vitesse le train se déplace-t-il lorsqu'il passe sous le pont ? *[2 points]*

(iii)



Le **train B** circule dans le sens opposé à celui du train A, le long du trajet montré ci-dessus. Le **train B** s'approche du pont avec une vitesse donnée par la fonction

$$u(t) = 2t + 1{,}5\ (\mathrm{m\,s^{-1}}) \quad (t \text{ secondes}, 0 \le t \le 3).$$

La distance du train B à la gare peut être obtenu par la fonction $R(t)$ qui est une primitive de $u(t)$.

(a) Le train B est à 0,5 mètre à droite de la gare après 1 seconde. Déterminez $R(t)$. *[4 points]*

(b) À combien de mètres de la gare se trouve le train B après 1,6 secondes ? *[2 points]*