MÉTODOS MATEMÁTICOS
NIVEL MEDIO
PRUEBA 1

Número del alumno

Martes 4 de noviembre de 2003 (tarde)

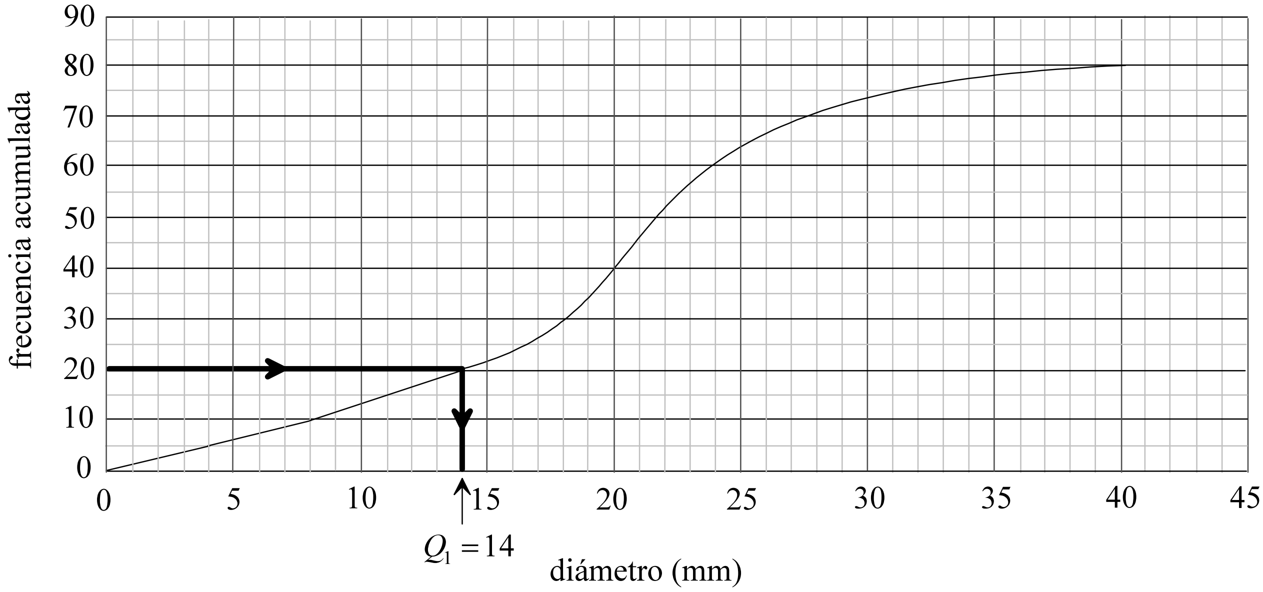
1 hora

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- Escriba su número de alumno en las casillas de arriba.
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste todas las preguntas en los espacios provistos.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o con tres cifras significativas.
- Escriba la marca y el modelo de su calculadora en el cuadro correspondiente de la portada del examen (p.ej., Casio *fx-9750G*, Sharp EL-9600, Texas Instruments TI-85).

Se otorgará la máxima puntuación a las respuestas correctas. Cuando la respuesta sea incorrecta se otorgarán algunos puntos siempre que aparezca el método empleado y éste sea correcto. Donde sea necesario, puede utilizar para sus cálculos el espacio que queda debajo del cuadro. Para los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el proceso seguido hasta su obtención. Por ejemplo, cuando deba utilizar gráficas de una calculadora de pantalla gráfica para hallar soluciones, deberá dibujar esas gráficas en su respuesta.

1. Un alumno mide el diámetro de 80 piedras. Los resultados se muestran en la siguiente gráfica de frecuencias acumuladas. El primer cuartil (Q_1) es 14 mm y está señalado claramente en la gráfica.



(a) Escriba y marque claramente del mismo modo, sobre la gráfica, el valor de

(i) la mediana;

(ii) el tercer cuartil.

(b) Escriba el valor del rango intercuartil.

Operaciones:

Respuesta:

(b) ______________________

2. La gráfica de la función $f(x) = 3x - 4$ corta al eje x en A y al eje y en B.

(a) Halle las coordenadas de

(i) A;

(ii) B.

(b) Halle el área del triángulo OAB, donde O es el origen.

Operaciones:

Respuestas:

(a) (i) ______________________

(ii) ______________________

(b) ______________________

3. La ecuación $kx^2 + 3x + 1 = 0$ tiene una única solución. Halle el valor de k.

Operaciones:

Respuesta:

4. Un pintor dispone de 12 botes de pintura, siete son de pintura roja y cinco de amarilla. Se eligen dos botes al azar. Calcule la probabilidad de que los dos botes sean del mismo color.

Operaciones:

Respuesta:

5. Complete el siguiente desarrollo.

$$(2+ax)^4 = 16 + 32ax + \ldots$$

Operaciones:

Respuesta:

6. Arturo va a nadar todas las semanas. Nada 200 metros en la primera semana. Cada semana hace 30 metros más que la anterior. Sigue así durante un año (52 semanas).

(a) ¿Cuántos metros nadará Arturo en la última semana?

(b) ¿Cuánto habrá nadado en total?

Operaciones:

Respuestas:

(a) ______________________________

(b) ______________________________

7. Una ecuación vectorial de la recta L es $\boldsymbol{r}=\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$.

¿Cuáles de las siguientes son también ecuaciones vectoriales de la misma recta L?

A. $\boldsymbol{r}=\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$.

B. $\boldsymbol{r}=\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}$.

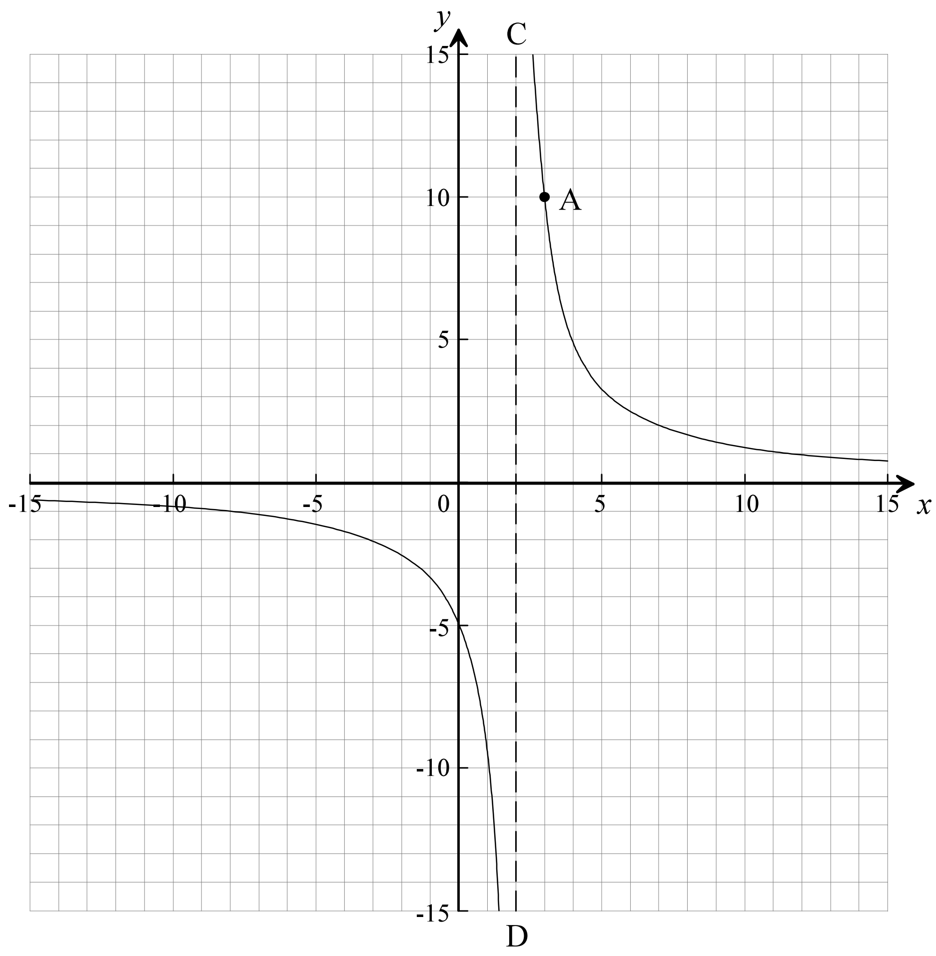
C. $\boldsymbol{r}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$.

D. $\boldsymbol{r}=\begin{pmatrix}7\\5\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$.

Operaciones:

Respuestas:

8. (a) La siguiente figura muestra parte de la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{q}{x - p}$. La curva pasa por el punto $A(3, 10)$. La recta (CD) es una asíntota.



Halle los valores de

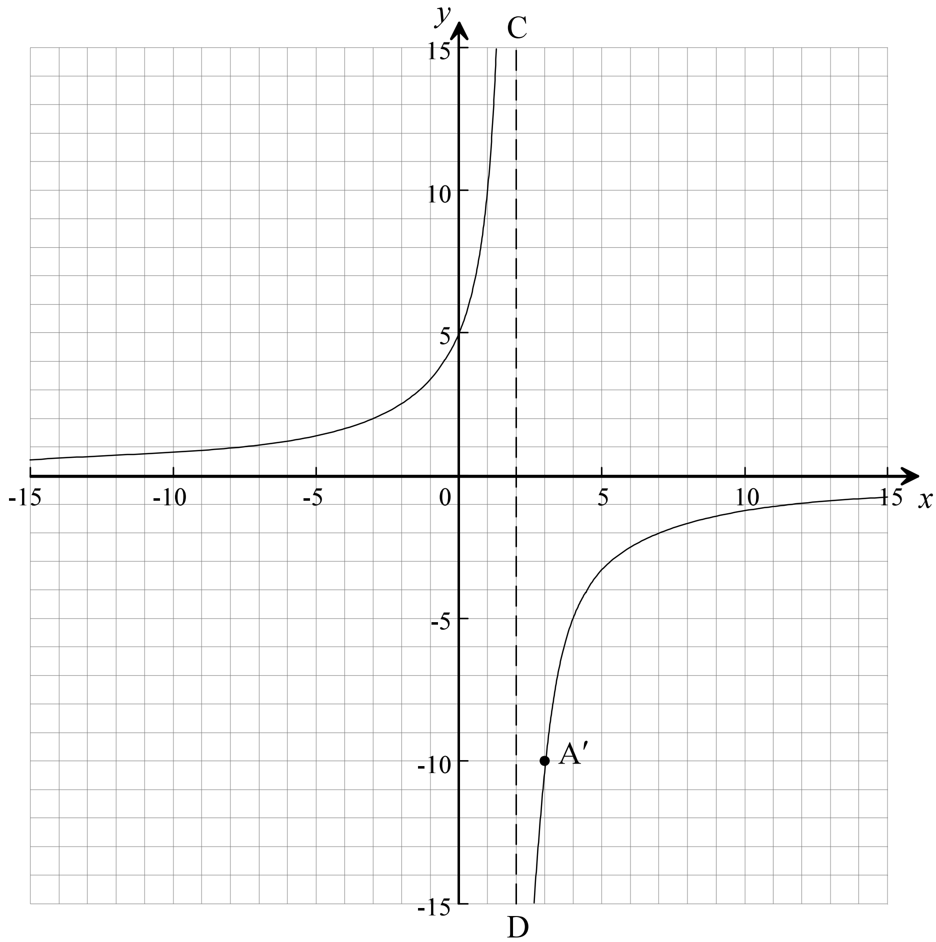
(i) p;

(ii) q.

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 8: continuación)

(b) La gráfica de $f(x)$ se ha transformado según se muestra a continuación. El punto A se transforma en $\mathrm{A}'\ (3, -10)$.



Dé una descripción geométrica completa de la transformación.

Operaciones:

Respuestas:

(a) (i) ____________________

(ii) ____________________

(b) ____________________

____

9. (a) Halle el producto escalar de los vectores $\begin{pmatrix} 60 \\ 25 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -30 \\ 40 \end{pmatrix}$.

(b) Existen dos señales en los puntos $P(60, 25)$ y $Q(-30, 40)$. Un topógrafo que se encuentra situado en $O(0, 0)$ mira hacia la señal en P. Halle el ángulo que debe girarse para mirar hacia la señal en Q.

Operaciones:

Respuestas:

(a) ______________________________

(b) ______________________________

10. La masa m kg de una sustancia radioactiva en un instante t horas viene dada por

$$m = 4\mathrm{e}^{-0,2t} .$$

(a) Escriba la masa inicial.

(b) La masa se ha reducido a 1,5 kg. ¿Cuánto tiempo ha durado el proceso?

Operaciones:

Respuestas:

(a) ____________________

(b) ____________________

11. Se supone que $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x^3 + 2x - 1$ y que $y = 13$ cuando $x = 2$.

Halle y en función de x.

Operaciones:

Respuesta:

____

12. La función f viene dada por $f(x) = x^2 - 6x + 13$, para $x \geq 3$.

(a) Escriba $f(x)$ en la forma $(x - a)^2 + b$.

(b) Halle la función inversa f^{-1}.

(c) Establezca el dominio de f^{-1}.

Operaciones:

Respuestas:

(a) ______________________

(b) ______________________

(c) ______________________

13. (a) Factorice la expresión $3\,\text{sen}^2 x - 11\,\text{sen}\, x + 6$.

(b) Considere la ecuación $3\,\text{sen}^2 x - 11\,\text{sen}\, x + 6 = 0$.

(i) Halle los dos valores de sen x que satisfacen esta ecuación.

(ii) Resuelva la ecuación para $0^\circ \le x \le 180^\circ$.

Operaciones:

Respuestas:

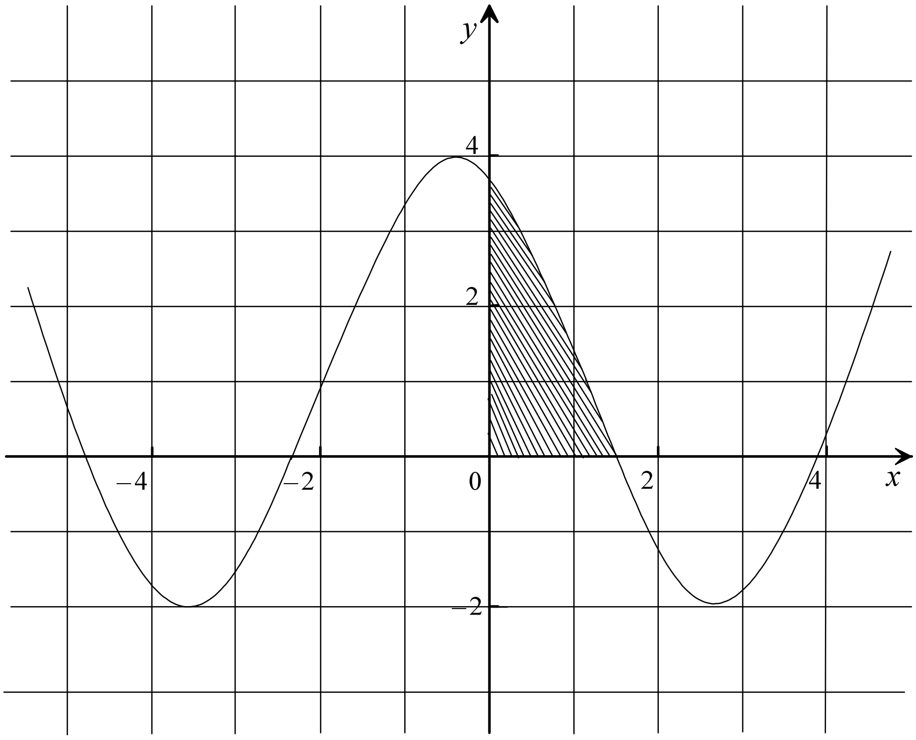
(a) ______________________

(b) (i) ______________________

(ii) ______________________

14. (a) Halle $\int\left(1+3\operatorname{sen}(x+2)\right)\mathrm{d}x$.

(b) La siguiente figura muestra parte de la gráfica de la función $f(x)=1+3\operatorname{sen}(x+2)$. El área de la región sombreada viene dada por $\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$.



Halle el valor de *a*.

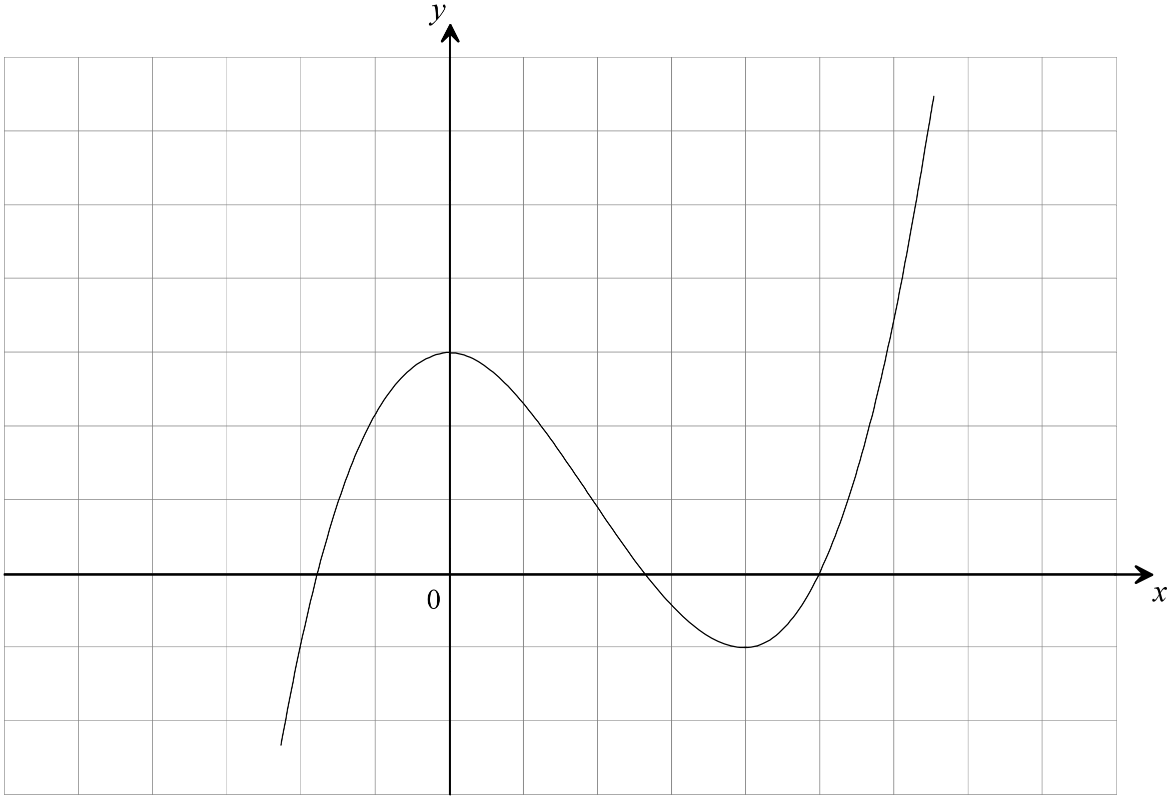
Operaciones:

Respuestas:

(a) ______________________

(b) ______________________

15. La siguiente figura muestra la gráfica de la función $y = f(x)$.



Dibuje de forma aproximada, sobre la cuadrícula inferior, la gráfica de $y = f'(x)$.