MÉTODOS MATEMÁTICOS
NIVEL MEDIO
PRUEBA 2

Martes 6 de mayo de 2003 (mañana)

2 horas

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste las cinco preguntas de la Sección A y una pregunta de la Sección B.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o con tres cifras significativas.
- Escriba la marca y el modelo de su calculadora en el cuadro correspondiente de la portada del examen (p. ej., Casio *fx-9750G*, Sharp EL-9600, Texas Instruments TI-85).

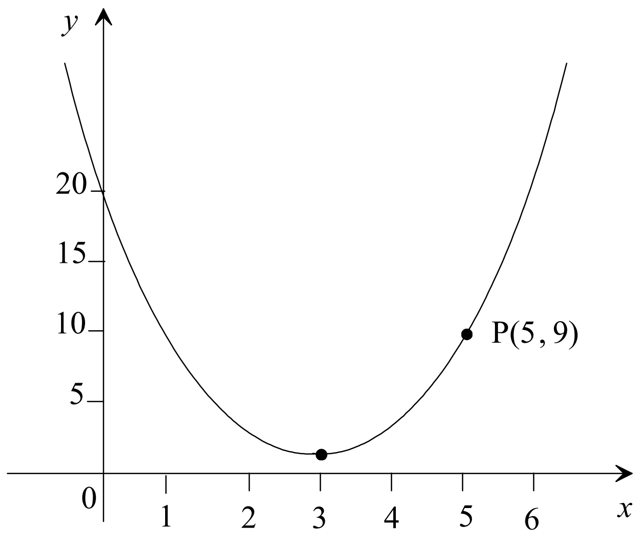
Empiece una página nueva para cada respuesta. Se recomienda que muestre todos los cálculos, siempre que sea posible. Cuando la respuesta sea incorrecta se otorgarán algunos puntos siempre que aparezca el método empleado y éste sea correcto. Para los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el proceso seguido hasta su obtención. Por ejemplo, cuando deba utilizar gráficas de una calculadora de pantalla gráfica para hallar soluciones, deberá dibujar esas gráficas en su respuesta.

SECCIÓN A

*Conteste las **cinco** preguntas de esta sección.*

1. *[Puntuación máxima: 10]*

El diagrama muestra parte de la gráfica de la curva $y = a(x-h)^2 + k$, donde $a, h, k \in \mathbb{Z}$.



(a) El vértice está en el punto $(3, 1)$. Escriba el valor de h y de k. *[2 puntos]*

(b) El punto P(5, 9) está sobre la gráfica. Demuestre que $a = 2$. *[3 puntos]*

(c) A partir de ello, demuestre que la ecuación de la curva se puede escribir de la forma

$$y = 2x^2 - 12x + 19.$$ *[1 punto]*

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 1: continuación)

(d) (i) Halle $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

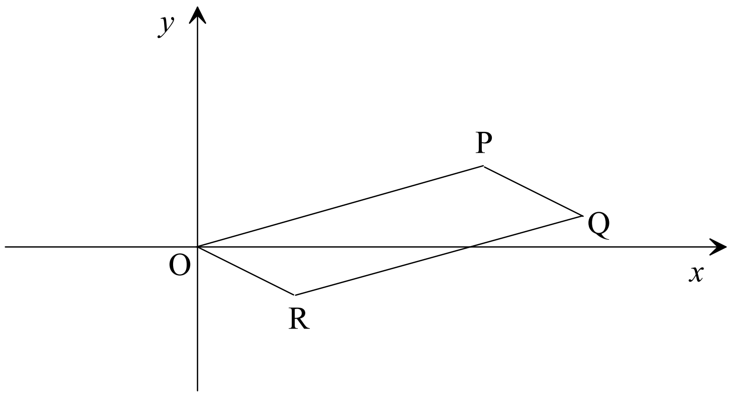
Se traza una tangente a la curva en $\mathrm{P}(5, 9)$.

(ii) Calcule la pendiente de esta tangente.

(iii) Halle la ecuación de esta tangente. *[4 puntos]*

2. *[Puntuación máxima: 14]*

En la figura aparece un paralelogramo OPQR en el cual $\vec{OP} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{OQ} = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix}$.



(a) Halle el vector $\vec{OR}$. *[3 puntos]*

(b) Use el producto escalar de dos vectores para demostrar que

$$\cos \mathrm{O\hat{P}Q} = -\frac{15}{\sqrt{754}}.$$ *[4 puntos]*

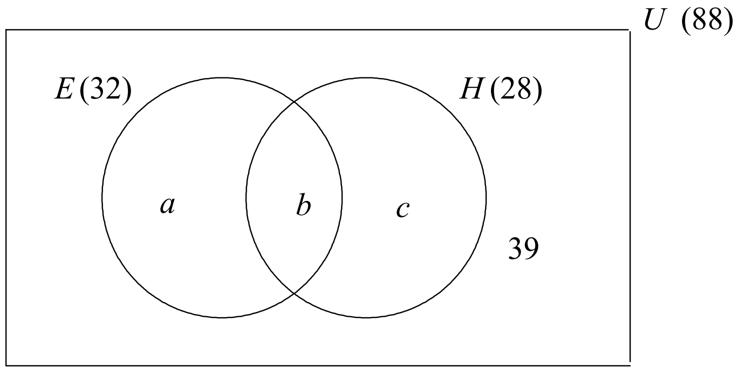
(c) (i) Explique por qué $\cos \mathrm{P\hat{Q}R} = -\cos \mathrm{O\hat{P}Q}$.

(ii) A partir de ello, demuestre que $\operatorname{sen} \mathrm{P\hat{Q}R} = \frac{23}{\sqrt{754}}$.

(iii) Calcule el área del paralelogramo OPQR, expresando su respuesta como un número entero. *[7 puntos]*

3. *[Puntuación máxima: 12]*

En una escuela en la cual hay 88 muchachos, 32 estudian Economía (E), 28 estudian Historia (H) y 39 no estudian ninguna de las dos materias. Esta información se representa en el siguiente diagrama de Venn.



(a) Calcule los valores de a, b y c. *[4 puntos]*

(b) Se elige un estudiante al azar.

(i) Calcule la probabilidad de que estudie **a la vez** Economía e Historia.

(ii) Suponiendo que estudie Economía, calcule la probabilidad de que **no** estudie Historia. *[3 puntos]*

(c) Se elige un grupo de tres estudiantes de la escuela de forma aleatoria.

(i) Calcule la probabilidad de que ninguno de estos estudiantes estudie Economía.

(ii) Calcule la probabilidad de que al menos uno de estos estudiantes estudie Economía. *[5 puntos]*

4. *[Puntuación máxima: 18]*

Un aeroplano aterriza en una pista. Su velocidad $v\,\text{ms}^{-1}$ en el instante t segundos después de aterrizar está dada por la ecuación $v = 50 + 50\text{e}^{-0,5t}$, donde $0 \le t \le 4$.

(a) Halle la velocidad del aeroplano

(i) al aterrizar;

(ii) cuando $t = 4$. *[4 puntos]*

(b) Escriba una integral que represente la distancia recorrida en los primeros cuatro segundos. *[3 puntos]*

(c) Calcule la distancia recorrida en los primeros cuatro segundos. *[2 puntos]*

Pasados cuatro segundos, el aeroplano disminuye su velocidad con una aceleración negativa **constante** y queda en reposo cuando $t = 11$.

(d) **Trace** una gráfica de la velocidad en función del tiempo para $0 \le t \le 11$. Rotule claramente los ejes y marque en la gráfica el punto para el cual $t = 4$. *[5 puntos]*

(e) Halle la aceleración negativa constante a la cual el aeroplano disminuye su velocidad entre $t = 4$ y $t = 11$. *[2 puntos]*

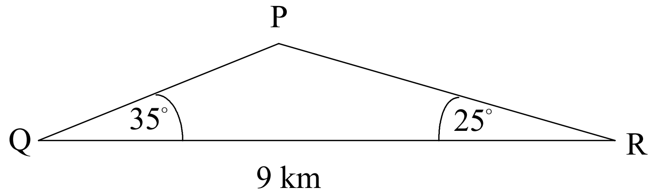
(f) Calcule la distancia recorrida por el aeroplano entre $t = 4$ y $t = 11$. *[2 puntos]*

5. *[Puntuación máxima: 16]*

Los puntos P, Q, R son tres marcadores ubicados en un terreno llano, unidos por trayectorias rectas PQ, QR, PR como se muestra en el diagrama.

$$\mathrm{QR} = 9\ \mathrm{km},\ \mathrm{P\hat{Q}R} = 35^\circ,\ \mathrm{P\hat{R}Q} = 25^\circ.$$

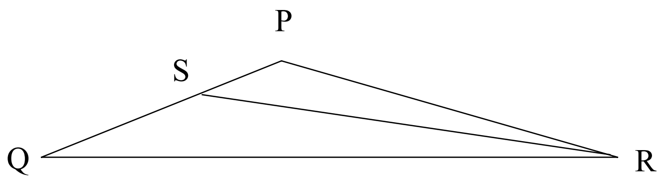
figura no dibujada a escala



(a) Halle la longitud de PR. *[3 puntos]*

(b) Tom comienza a caminar de Q a P a una velocidad constante de $8\ \mathrm{km\,h^{-1}}$. Al mismo tiempo, Alan sale a correr de R a P a una velocidad constante de $a\ \mathrm{km\,h^{-1}}$. Llegan a P en el mismo instante. Calcule el valor de a. *[7 puntos]*

(c) El punto S está sobre [PQ] y es tal que $\mathrm{RS} = 2\mathrm{QS}$, como se muestra en la figura.



Halle la longitud de QS. *[6 puntos]*

SECCIÓN B

*Conteste **una** pregunta de esta sección.*

Métodos estadísticos

6. *[Puntuación máxima: 30]*

(i) Una empresa fabrica receptores de televisión. La empresa afirma que la vida útil de un televisor tiene una distribución normal, con una media de 80 meses y una desviación típica de 8 meses.

(a) ¿Qué proporción de los televisores se rompe en menos de 72 meses? *[2 puntos]*

(b) (i) Calcule la proporción de televisores con una vida útil de entre 72 meses y 90 meses.

(ii) Ilustre esta proporción con el correspondiente sombreado en un diagrama de una curva de distribución normal. *[5 puntos]*

(c) Cuando un televisor se rompe en menos de x meses, la compañía lo reemplaza sin cargo. Se reemplaza el 4 % de los televisores. Halle el valor de x. *[3 puntos]*

(d) Un diario afirma que la vida media de los televisores es inferior a 80 meses. Para probar esta afirmación, el diario toma una muestra aleatoria de 100 televisores y encuentra que su vida media es de 78,5 meses.

(i) Enuncie la hipótesis nula y la hipótesis alternativa.

(ii) Demuestre que, al nivel de significación del 5 %, lo anterior es prueba suficiente de lo afirmado por el diario. *[5 puntos]*

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 6: continuación)

(ii) Un fabricante de muebles hace sillas que vende a tiendas.

A lo largo de un período de seis semanas, el costo $\$y$ de producción de x sillas es el que se da en la siguiente tabla.

	Semana 1	Semana 2	Semana 3	Semana 4	Semana 5	Semana 6
Número de sillas x	22	40	32	28	46	44
Costo de producción $\$y$	3 200	4 600	3 800	3 700	5 100	5 000

(a) Halle la ecuación de la recta de regresión de y sobre x para estos datos. *[2 puntos]*

(b) Las sillas se venden a \$120 cada una. Halle el número mínimo de sillas que debe vender la fábrica por semana para obtener ganancias. *[5 puntos]*

(iii) Un jugador de golf australiano juega 30 torneos por año, 17 en Australia y 13 en Europa. El número de torneos en los cuales acabó entre los diez primeros se indica en la siguiente tabla:

	Australia	**Europa**
Entre los diez primeros	6	6
Por debajo de los diez primeros	11	7

(a) Construya una tabla de frecuencias esperadas suponiendo que los resultados del golfista son independientes del lugar en el que juega. (No aplique la corrección de continuidad de Yates.) *[2 puntos]*

(b) Halle el χ^2 de estos datos. *[2 puntos]*

(c) (i) Determine si los datos demuestran, al nivel de significación del 5 %, que el golfista juega mejor en un continente que en el otro.

(ii) Ilustre su respuesta por medio de un diagrama. *[4 puntos]*

Extensión de análisis

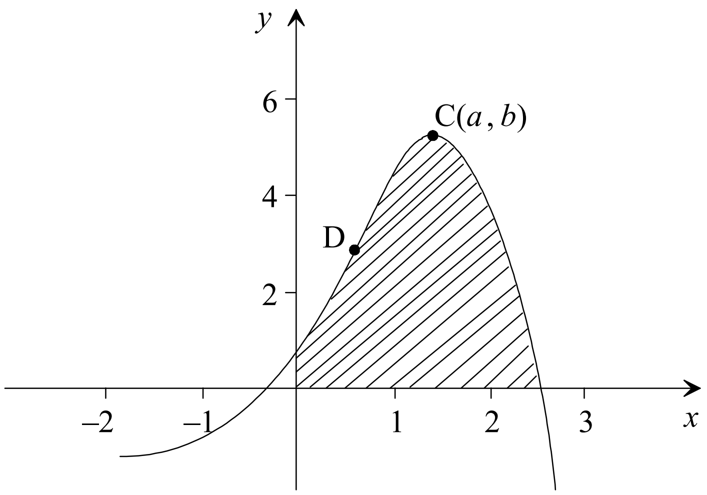
7. *[Puntuación máxima: 30]*

(i) Sea la función $f(x) = \cos x + \operatorname{sen} x$.

(a) (i) Demuestre que $f(-\frac{\pi}{4}) = 0$.

(ii) Halle, en función de π, el menor valor **positivo** de x que satisface $f(x) = 0$. *[3 puntos]*

En el diagrama se muestra la gráfica de $y = e^x(\cos x + \operatorname{sen} x)$, $-2 \le x \le 3$.
La gráfica tiene un máximo en $C(a, b)$ y un punto de inflexión en D.



(b) Halle $\frac{dy}{dx}$. *[3 puntos]*

(c) Halle el valor **exacto** de a y de b. *[4 puntos]*

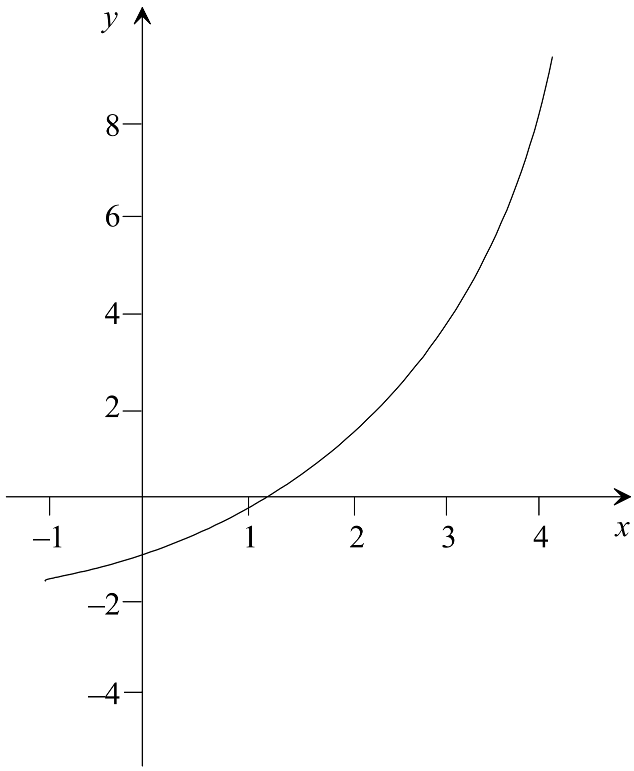
(d) Demuestre que en el punto D, $y = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}$. *[5 puntos]*

(e) Halle el área de la región sombreada. *[2 puntos]*

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 7: continuación)

(ii) Sea la función $g(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - 1$. Parte de la gráfica de g aparece a continuación.



Se usa el método de Newton-Raphson para resolver $g(x) = 0$. El valor inicial es $x_0 = 2$.

(a) Calcule x_1 y x_2. *[3 puntos]*

(b) Trace un diagrama para ilustrar cómo se usa el método de Newton-Raphson para hallar x_1. *[4 puntos]*

(c) ¿Cuántas iteraciones se necesitan para obtener una solución con una aproximación de **seis** cifras significativas? *[1 punto]*

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 7: continuación)

La solución a $g(x) = 0$ se puede también hallar aplicando la iteración de punto fijo.

(d) Demuestre que una de las iteraciones posibles es

$$x_{n+1} = \sqrt[3]{3\left(\frac{x_n^2}{2} - x_n + 1\right)}.$$ *[1 punto]*

(e) Use la iteración del apartado (d) para responder a las siguientes preguntas.

(i) Usando $x_0 = 2$, halle x_1 y x_2.

(ii) ¿Cuántas iteraciones se necesitan para dar una solución con una aproximación de **seis** cifras significativas? *[4 puntos]*

Extensión de geometría

8. *[Puntuación máxima: 30]*

(i) Las matrices $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{X}$ están dadas por

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \text{donde } a, b, c \text{ y } d \in \mathbb{Q}.$$

Suponiendo que $\boldsymbol{AX} + \boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$, halle los valores **exactos** de a, b, c y d. *[8 puntos]*

(ii) Una transformación lineal está representada por la matriz $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$.

(a) Escriba $\boldsymbol{P}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. *[1 punto]*

(b) Halle

(i) $\boldsymbol{P}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$;

(ii) $\boldsymbol{P}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$. *[2 puntos]*

(c) A partir de lo anterior, halle las ecuaciones de las dos rectas invariantes mediante la transformación $\boldsymbol{P}$. *[5 puntos]*

(d) El origen es un punto invariante mediante la transformación $\boldsymbol{P}$. Utilice su respuesta al apartado (c) para explicar por qué es el **único** punto invariante. *[1 punto]*

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 8: continuación)

(iii) La matriz $\boldsymbol{R}$ representa una rotación de ángulo θ alrededor del origen, donde θ es agudo, y $\tan\theta = \frac{12}{5}$.

(a) Halle la matriz $\boldsymbol{R}$ usando valores exactos. *[4 puntos]*

La rotación de ángulo θ aldredor del punto $\mathrm{P}(5, 1)$ se representa por $\boldsymbol{T}$.

(b) Escriba la imagen de $\mathrm{P}(5, 1)$ mediante $\boldsymbol{T}$. *[1 punto]*

(c) Se puede escribir $\boldsymbol{T}$ de la forma $\boldsymbol{T}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boldsymbol{R}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$.
Halle el valor de h y el valor de k. *[4 puntos]*

(d) Se puede expresar $\boldsymbol{T}$ como la composición de dos isometrías $\boldsymbol{S}$ y $\boldsymbol{R}$, es decir, $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{S} \circ \boldsymbol{R}$. Escriba una descripción geométrica completa de la transformación $\boldsymbol{S}$. *[2 puntos]*

(e) El punto Q, de coordenadas $(17, -4)$ se convierte en Q' cuando se lo somete a la transformación $\boldsymbol{T}$. Halle la longitud PQ'. *[2 puntos]*