MÉTHODES MATHÉMATIQUES
NIVEAU MOYEN
ÉPREUVE 2

Mardi 6 mai 2003 (matin)

2 heures

INSTRUCTIONS DESTINÉES AUX CANDIDATS

- N'ouvrez pas cette épreuve avant d'y être autorisé.
- Répondez à toutes les questions de la section A et à une question de la section B.
- Sauf indication contraire dans l'intitulé de la question, les réponses numériques devront être exactes ou à trois chiffres significatifs près.
- Veuillez indiquer la marque et le modèle de votre calculatrice dans les cases appropriées sur la page de couverture (par exemple, *Casio fx-9750G*, Sharp EL-9600, Texas Instruments TI-85).

Veuillez répondre à chaque question sur une nouvelle page. On vous recommande d'indiquer votre raisonnement autant que possible. Lorsque la réponse est fausse, certains points seront accordés si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. Les solutions obtenues à l'aide de calculatrices à écran graphique doivent être accompagnées d'un raisonnement adéquat. Par exemple, si des graphiques sont utilisés pour trouver la solution, veuillez inclure un croquis de ces graphes dans votre réponse.

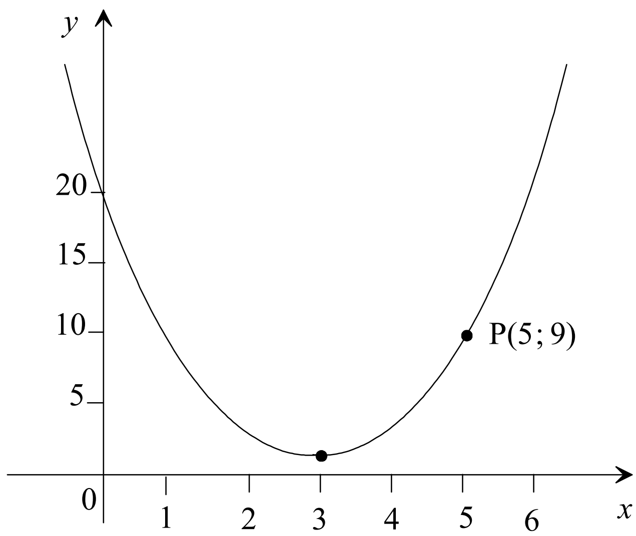
SECTION A

Répondez aux ***cinq*** *questions de cette section.*

1. *[Note maximum: 10]*

La figure montre une partie de la courbe de

$$y = a(x-h)^2 + k, \text{ où } a, h, k \in \mathbb{Z}.$$



(a) Le sommet est au point $(3;1)$. Écrivez la valeur de h et de k. *[2 points]*

(b) Le point P(5 ; 9) est sur la courbe. Montrez que $a = 2$. *[3 points]*

(c) À partir de là, montrez que l'équation de la courbe peut s'écrire sous la forme

$$y = 2x^2 - 12x + 19.$$ *[1 point]*

(Suite de la question à la page suivante)

(Suite de la question 1)

(d) (i) Trouvez $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

On trace la tangente à la courbe au point $\mathrm{P}(5\,;9)$.

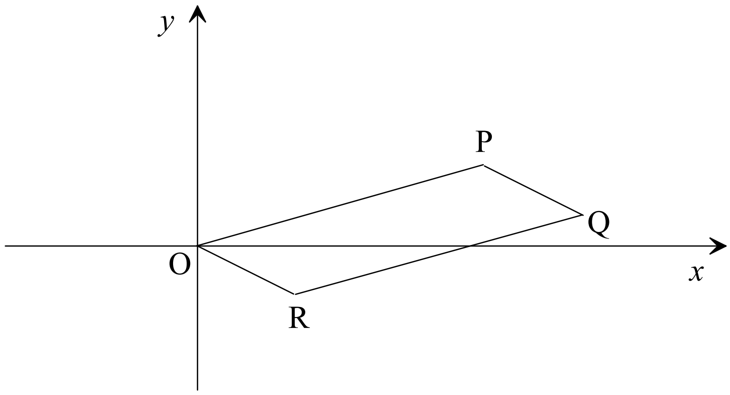
(ii) Calculez la pente de cette tangente.

(iii) Trouvez l'équation de cette tangente. *[4 points]*

2. *[Note maximum : 14]*

La figure montre un parallélogramme OPQR dans lequel

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix}.$$



(a) Trouvez le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$. *[3 points]*

(b) Utilisez le produit scalaire de deux vecteurs pour montrer que

$$\cos \mathrm{O\hat{P}Q} = -\frac{15}{\sqrt{754}}.$$

[4 points]

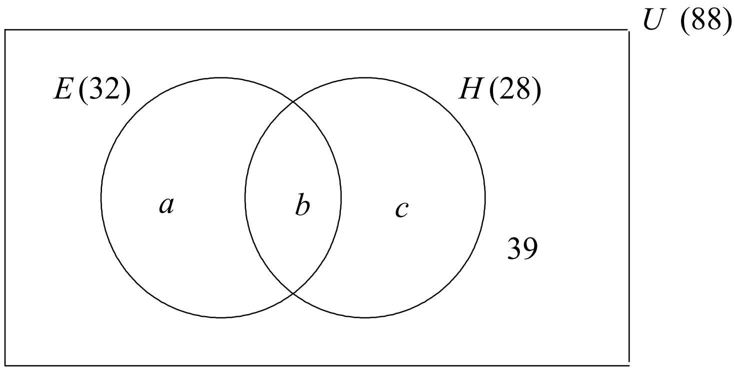
(c) (i) Expliquez pourquoi $\cos \mathrm{P\hat{Q}R} = -\cos \mathrm{O\hat{P}Q}$.

(ii) À partir de là montrez que $\sin \mathrm{P\hat{Q}R} = \dfrac{23}{\sqrt{754}}$.

(iii) Calculez l'aire du parallélogramme OPQR, en donnant votre réponse sous forme d'un entier. *[7 points]*

3. *[Note maximum : 12]*

Dans une école de 88 garçons, 32 étudient l'économie (E), 28 étudient l'histoire (H) et 39 n'étudient aucun de ces deux sujets. Ces informations sont représentées dans le diagramme de Venn suivant.



(a) Calculez les valeurs a, b, c. *[4 points]*

(b) Un étudiant est choisi au hasard.

(i) Calculez la probabilité qu'il étudie **à la fois** l'économie et l'histoire.

(ii) Sachant qu'il étudie l'économie, calculez la probabilité qu'il **n**'étudie **pas** l'histoire. *[3 points]*

(c) Un groupe de trois étudiants est choisi au hasard dans l'école.

(i) Calculez la probabilité qu'aucun de ces étudiants n'étudie l'économie.

(ii) Calculez la probabilité qu'au moins un de ces étudiants étudie l'économie. *[5 points]*

4. *[Note maximum : 18]*

Un avion atterrit sur une piste. Sa vitesse $v\,\text{ms}^{-1}$ à l'instant t secondes après l'atterrissage est donnée par l'expression $v = 50 + 50e^{-0,5t}$, où $0 \le t \le 4$.

(a) Trouvez la vitesse de l'avion

(i) quand il atterrit ;

(ii) quand $t = 4$. *[4 points]*

(b) Écrivez une intégrale qui représente la distance parcourue pendant les quatre premières secondes. *[3 points]*

(c) Calculez la distance parcourue pendant les quatre premières secondes. *[2 points]*

Après quatre secondes, l'avion ralentit (décélère) **à un taux constant** et s'arrête quand $t = 11$.

(d) **Faites un croquis** de la courbe représentant la vitesse en fonction du temps pour $0 \le t \le 11$. Nommez clairement les axes et marquez sur la courbe le point où $t = 4$. *[5 points]*

(e) Trouvez le taux constant auquel l'avion ralentit (décélère) entre $t = 4$ et $t = 11$. *[2 points]*

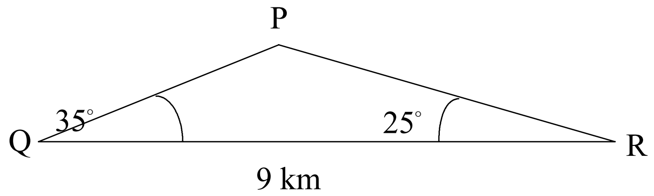
(f) Calculez la distance parcourue par l'avion entre $t = 4$ et $t = 11$. *[2 marks]*

5. *[Note maximum : 16]*

Les points P, Q, R sont des repères au niveau du sol ; ils sont reliés par des chemins en ligne droite PQ, QR, PR comme le montre la figure.

$$\mathrm{QR} = 9\ \mathrm{km},\ \mathrm{P\hat{Q}R} = 35^\circ,\ \mathrm{P\hat{R}Q} = 25^\circ .$$

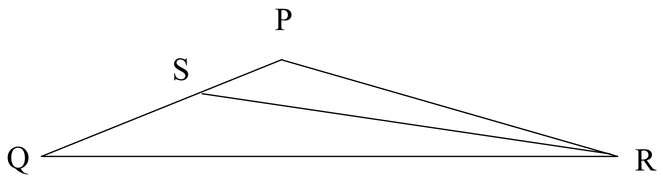
la figure n'est pas à l'échelle



(a) Trouvez la longueur PR. *[3 points]*

(b) Tom commence à marcher de Q à P à la vitesse constante de $8\ \mathrm{km\,h^{-1}}$. Au même moment, Alan commence à courir de R à P à la vitesse constante de $a\ \mathrm{km\,h^{-1}}$. Ils arrivent en P au même moment. Calculez la valeur de *a*. *[7 points]*

(c) Le point S est sur [PQ], de telle façon que $\mathrm{RS} = 2\mathrm{QS}$, comme le montre la figure.



Trouvez la longueur QS. *[6 points]*

SECTION B

*Répondez à **une** question de cette section.*

Méthodes statistiques

6. *[Note maximum : 30]*

(i) Une compagnie fabrique des postes de télévision. Elle annonce que la durée de vie d'une télévision est normalement distribuée avec une moyenne de 80 mois et un écart type de 8 mois.

(a) Quelle proportion de télévisions tombe en panne en moins de 72 mois ? *[2 points]*

(b) (i) Calculez la proportion des télévisions qui ont une durée de vie comprise entre 72 mois et 90 mois.

(ii) Illustrez cette proportion par des hachures appropriées sur un croquis d'une courbe de distribution normale. *[5 points]*

(c) Si une télévision tombe en panne en moins de x mois, la compagnie la remplace gratuitement. Elle remplace 4 % des télévisions. Trouvez la valeur de x. *[3 points]*

(d) Un journal prétend que la durée de vie moyenne d'une télévision est de moins de 80 mois. Pour tester cette affirmation, on prend un échantillon aléatoire de 100 télévisions et observe que la durée de vie moyenne est de 78,5 mois.

(i) Formulez l'hypothèse nulle et la contre-hypothèse.

(ii) Au seuil de signification de 5 %, montrez que cela est une preuve suffisante pour justifier l'affirmation du journal. *[5 points]*

(ii) Un fabricant de meubles fabrique des chaises et les vend à des magasins.

Sur une période de six semaines, le coût y \$ de production de x chaises est donné dans le tableau suivant.

	Semaine 1	Semaine 2	Semaine 3	Semaine 4	Semaine 5	Semaine 6
Nombre de chaises x	22	40	32	28	46	44
Coût de production y \$	3 200	4 600	3 800	3 700	5 100	5 000

(a) Trouvez l'équation de la droite de régression de y sur x pour ces données. *[2 points]*

(b) Les chaises sont vendues 120 \$ chacune. Trouvez le nombre minimum de chaises que le fabriquant doit vendre chaque semaine pour pouvoir faire un bénéfice. *[5 points]*

(Suite de la question à la page suivante)

(Suite de la question 6)

(iii) Un golfeur australien joue 30 tournois par an, 17 en Australie et 13 en Europe. Le nombre de tournois dans lesquels il a été classé dans les dix premiers est donné dans le tableau suivant :

	Australie	**Europe**
Classé dans les 10 premiers	6	6
Classé hors des 10 premiers	11	7

(a) Construisez un tableau des effectifs esperés en supposant que les performances du golfeur sont indépendantes du lieu où il joue. (N'appliquez pas la formule du χ^2 corrigée de Yates.) *[2 points]*

(b) Trouvez χ^2 pour ces données. *[2 points]*

(c) (i) Déterminez si ces données fournissent la preuve au seuil de signification de 5 % que le golfeur joue mieux dans un continent que dans l'autre.

(ii) Illustrer votre réponse, en utilisant une figure. *[4 points]*

Compléments d'analyse

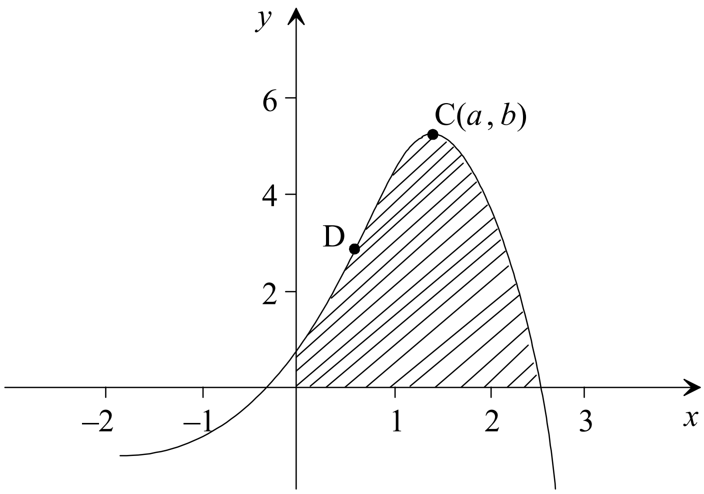
7. *[Note maximum : 30]*

(i) Considérez la fonction $f(x) = \cos x + \sin x$.

(a) (i) Montrez que $f(-\frac{\pi}{4}) = 0$.

(ii) Trouvez en fonction de π, la plus petite valeur **positive** de x qui vérifie $f(x) = 0$. *[3 points]*

La figure montre la courbe de $y = e^x(\cos x + \sin x)$, $-2 \le x \le 3$. La courbe présente un point maximum en $C(a, b)$ et un point d'inflexion en D.



(b) Trouvez $\frac{dy}{dx}$. *[3 points]*

(c) Trouvez les valeurs **exactes** de a et de b. *[4 points]*

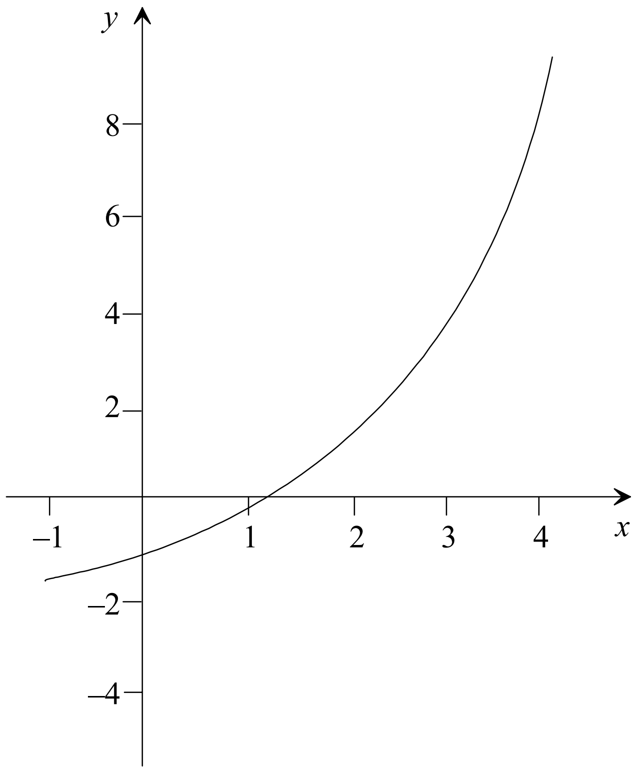
(d) Montrez qu'en D, $y = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}$. *[5 points]*

(e) Trouvez l'aire de la surface hachurée. *[2 points]*

(Suite de la question à la page suivante)

(Suite de la question 7)

(ii) Considérez la fonction $g(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x-1$. Une partie de la courbe de g est montrée ci-dessous.



La méthode de Newton-Raphson est utilisée pour résoudre $g(x)=0$.
La valeur initiale est $x_0 = 2$.

(a) Calculez x_1 et x_2. *[3 points]*

(b) Dessinez une figure pour illustrer comment la méthode de Newton-Raphson est utilisée pour trouver x_1. *[4 points]*

(c) Combien d'itérations sont nécessaires pour donner la solution correcte jusqu'à **six** chiffres significatifs ? *[1 point]*

(Suite de la question à la page suivante)

(Suite de la question 7)

La solution de $g(x)=0$ peut aussi être trouvée en utilisant une itération vers un point fixe.

(d) Montrez qu'une itération possible est

$$x_{n+1} = \sqrt[3]{3\left(\frac{x_n^2}{2} - x_n + 1\right)}\,.$$

[1 point]

(e) En utilisant l'itération donnée dans la partie (d), répondez aux questions suivantes.

(i) En utilisant $x_0 = 2$, trouvez x_1 et x_2.

(ii) Combien d'itérations faut-il pour donner la solution correcte jusqu'à **six** chiffres significatifs ?

[4 points]

Compléments de géométrie

8. *[Note maximum : 30]*

(i) Les matrices $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{X}$ sont données par

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \text{ où } a, b, c, d \in \mathbb{Q}.$$

Étant donné que $\boldsymbol{AX} + \boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$, trouvez les valeurs **exactes** de *a, b, c* et *d*. *[8 points]*

(ii) Une transformation linéaire est représentée par la matrice $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$.

(a) Écrivez $\boldsymbol{P}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. *[1 point]*

(b) Trouvez

(i) $\boldsymbol{P}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$;

(ii) $\boldsymbol{P}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$. *[2 points]*

(c) À partir de là, trouvez les équations des deux droites qui sont invariantes par la transformation $\boldsymbol{P}$. *[5 points]*

(d) L'origine est un point invariant par la transformation $\boldsymbol{P}$. Utilisez votre réponse à la partie (c) pour expliquer pourquoi il est le **seul** point invariant. *[1 point]*

(Suite de la question à la page suivante)

(Suite de la question 8)

(iii) La matrice $\boldsymbol{R}$ représente la rotation de θ autour de l'origine, avec θ angle aigu tel que $\tan\theta = \frac{12}{5}$.

(a) Écrivez la matrice $\boldsymbol{R}$, en utilisant des valeurs exactes. *[4 points]*

Une rotation de θ autour du point $\mathrm{P}(5, 1)$ est représentée par $\boldsymbol{T}$.

(b) Écrivez l'image de $\mathrm{P}(5, 1)$ par $\boldsymbol{T}$. *[1 point]*

(c) $\boldsymbol{T}$ peut être écrite sous la forme $\boldsymbol{T}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boldsymbol{R}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$. Trouvez la valeur de h et la valeur de k. *[4 points]*

(d) $\boldsymbol{T}$ peut être exprimée comme la composition de deux isométries $\boldsymbol{S}$ et $\boldsymbol{R}$, c'est-à-dire $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{S} \circ \boldsymbol{R}$. Donnez une description géométrique complète de la transformation $\boldsymbol{S}$. *[2 points]*

(e) Le point Q de coordonnées $(17; -4)$ a pour image Q' par la transformation $\boldsymbol{T}$. Trouvez la longueur PQ'. *[2 points]*