ESTUDIOS MATEMÁTICOS
NIVEL MEDIO
PRUEBA 2

Martes 6 de mayo de 2003 (mañana)

2 horas

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste las cinco preguntas de la Sección A y una pregunta de la Sección B.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o con tres cifras significativas.
- Escriba la marca y el modelo de su calculadora en el cuadro correspondiente de la portada del examen (p. ej., Casio fx-9750G, Sharp EL-9600, Texas Instruments TI-85).

Empiece una página nueva para cada respuesta. Se recomienda que muestre todos los cálculos, siempre que sea posible. Cuando la respuesta sea incorrecta se otorgarán algunos puntos siempre que aparezca el método empleado y éste sea correcto. Para los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el proceso seguido hasta su obtención. Por ejemplo, cuando deba utilizar gráficas de una calculadora de pantalla gráfica para hallar soluciones, deberá dibujar esas gráficas en su respuesta.

SECCIÓN A

Conteste las ***cinco*** *preguntas de esta sección.*

1. *[Puntuación máxima: 18]*

(i) Los conjuntos U, P, R y S se definen como sigue:

$U = \{$todos los cuadriláteros$\}$

$P = \{$todos los paralelogramos$\}$

$R = \{$todos los rectángulos$\}$

$S = \{$todos los cuadrados$\}$

(a) Trace un diagrama de Venn que muestre las relaciones entre los conjuntos anteriores. *[4 puntos]*

(b) Trace una diagrama de Venn aparte para cada uno de los ejemplos que siguen. Indique, usando sombreado, cada uno de los siguientes:

(i) $(P \cup S)'$

(ii) $(R \cup S) \cap P$ *[4 puntos]*

(ii) Considere cada una de las siguientes afirmaciones:

p: Alex es de Uruguay
q: Alex es un científico
r: Alex toca la flauta

(a) Escriba cada uno de los siguientes argumentos utilizando símbolos:

(i) Si Alex no es un científico, entonces no es de Uruguay.

(ii) Si Alex es un científico, entonces o es de Uruguay o toca la flauta. *[3 puntos]*

(b) Escriba el siguiente argumento usando palabras:

$\neg r \Rightarrow \neg(q \vee p)$ *[3 puntos]*

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 1(ii): continuación)

(c) Construya una tabla de verdad correspondiente al argumento del apartado (b) usando los valores a continuación de p, q, r y $\neg r$. Realice pruebas para ver si el argumento es o no válido lógicamente.

p	q	r	$\neg r$
V	V	V	F
V	V	F	V
V	F	V	F
V	F	F	V
F	V	V	F
F	V	F	V
F	F	V	F
F	F	F	V

[4 puntos]

2. *[Puntuación máxima: 11]*

Raúl, en la casa R, está justo al otro lado del lago de Sylvia, en la casa S. Las casas distan dos kilómetros entre sí. Cuando tanto Raul como Sylvia están mirando hacia el norte, ven una lancha de carreras B en el lago, entre las dos casas. Raul, en la casa R, ve la lancha a 35° al este de adonde está mirando. Sylvia, en la casa S, ve la misma lancha a 65° al oeste de adonde está mirando.

(a) Copie y complete el diagrama a continuación, indicando cuál es el ángulo de 35° y cuál el ángulo de 65°.

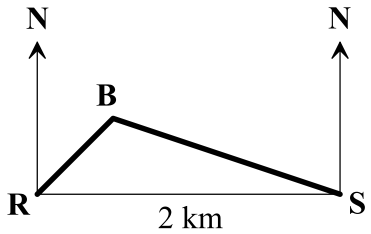


figura no dibujada a escala

[2 puntos]

(b) (i) Calcule la magnitud de $\mathrm{R\hat{B}S}$.

(ii) En este momento, ¿a qué distancia está la lancha (B) de la casa de Raul (R)? Exprese su respuesta redondeada a los 100 m más próximos. *[5 puntos]*

(c) Luego, Raul y Sylvia ven en el lago un bote a vela, en el punto Q, el cual está a 2,6 km de Raul (R) y a 3,5 km de Sylvia (S). Calcule la magnitud de $\mathrm{R\hat{Q}S}$ en ese momento, expresando su respuesta redondeada al grado más próximo. *[4 puntos]*

3. *[Puntuación máxima: 13]*

Cincuenta estudiantes de la Layton High School registraron cuánto dinero gastó cada estudiante de su clase en alquilar películas de vídeo durante este mes (redondeado al dólar más próximo). Los resultados se indican en la tabla de frecuencias a continuación:

Intervalos de clase en $	**Fronteras de clases en $**	**Frequencia**
1 – 10	0,50 – 10,50	10
11 – 20	10,50 – 20,50	20
21 – 30	20,50 – 30,50	10
31 – 40	30,50 – 40,50	0
41 – 50	40,50 – 50,50	4
51 – 60	50,50 – 60,50	2
61 – 70	60,50 – 70,50	4

(a) En un papel milimetrado y usando una escala en la cual 2 cm representan cada intervalo ($ 10,00) en el eje horizontal, y 1 cm para representar 5 personas en el eje vertical, trace y rotule claramente un histograma de frecuencias que muestre la información anterior. *[5 puntos]*

(b) Conteste las siguientes preguntas:

(i) ¿Qué clase es la clase modal?

(ii) ¿A qué clase pertenece la mediana? *[2 puntos]*

(c) Suponiendo que estos estudiantes gasten la misma suma en vídeos todos los meses, halle la probabilidad de que un estudiante gaste el mes que viene:

(i) Entre $ 21 y $ 30 inclusive en alquilar vídeos

(ii) $ 30 o menos en alquilar vídeos

(iii) De $ 41 a $ 60 en alquiler de vídeos, sabiendo que gastaron más de $ 20 en alquilar vídeos

(iv) No más de $ 60 en alquiler de vídeos, sabiendo que gastaron más de $ 10 en alquilar vídeos *[6 puntos]*

4. *[Puntuación máxima: 14]*

El número de bacterias (y) presentes en todo momento está dado por la fórmula:

$y = 15000\mathrm{e}^{-0,25t}$, donde t es el tiempo en segundos y e = 2,72 expresado con 3 cifras significativas.

(a) Calcule los valores de a, b y c a la centésima más próxima en la tabla a continuación:

Tiempo en segundos (t)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Número de bacterias (y) (centena más próxima)	a	11700	9100	7100	b	4300	3300	2600	c

[3 puntos]

(b) En un papel milimetrado, con 1 cm por cada segundo en el eje horizontal y 1 cm por cada millar en el eje vertical, trace y rotule la gráfica que representa esta información. *[5 puntos]*

(c) Use la gráfica para contestar las siguientes preguntas:

(i) ¿Pasados cuántos segundos habrá 5000 bacterias? Exprese su respuesta redondeada a la décima de segundo más próxima.

(ii) ¿Cuántas bacterias habrá pasados 6,8 segundos? Exprese su respuesta redondeada a la centena de bacterias más próxima.

(iii) ¿Habrá algún momento en el cual no queden más bacterias? Explique su respuesta. *[6 puntos]*

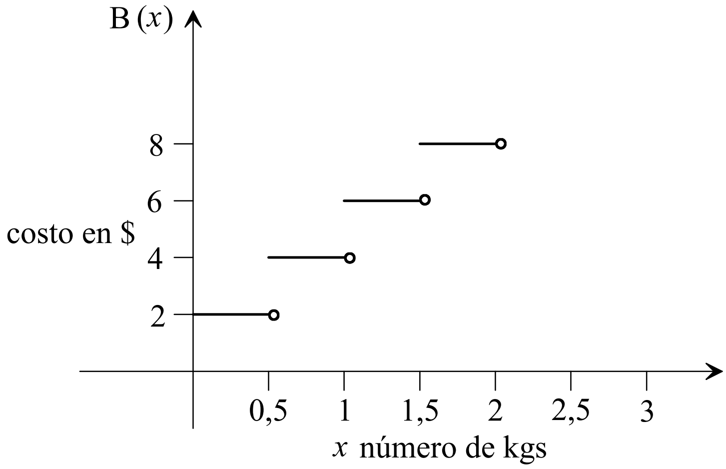
5. *[Puntuación máxima: 14]*

(a) Uschi desea enviar un paquete a Singapur desde la oficina de correos. Tiene dos opciones. La Opción A contiene un cargo fijo por enviar el paquete, más un costo que depende del peso del paquete. Estos cargos se expresan por la ecuación $\mathrm{A}(x) = 6 + 3x$, donde x es el peso del paquete en kg y $\mathrm{A}(x)$ es el costo total de enviar el paquete expresado en \$.

(i) ¿De cuánto es el cargo fijo por enviar un paquete según la Opción A?

(ii) ¿Cuánto costaría enviar un paquete que pesa 2,4 kg según la Opción A? *[3 puntos]*

(b) El costo de la Opción B se muestra parcialmente en la siguiente gráfica. El peso en kg está representado por la variable x.



(i) La función $\mathrm{B}(x)$ puede definirse para valores de x entre 0 y 1 kg como sigue:

$$\mathrm{B}(x) = \begin{cases} 2 & \text{para} \quad 0 \le x < 0{,}5 \\ 4 & \text{para} \quad 0{,}5 \le x < 1 \end{cases}$$

Para pesos mayores de 2 kg, el costo se sigue incrementando en intervalos de \$ 2, siguiendo el mismo modelo que para los pesos inferiores.

Defina $\mathrm{B}(x)$ para pesos entre 2 y 3 kg, escribiendo su respuesta según el esquema a continuación:

$$\mathrm{B}(x) = \begin{cases} \underline{\qquad} & \text{para} \quad \underline{\qquad\qquad} \\ \underline{\qquad} & \text{para} \quad \underline{\qquad\qquad} \end{cases}$$

(ii) Halle el costo de enviar un paquete que pesa 1,6 kg usando la Opción B. *[5 puntos]*

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 5: continuación)

(c) Conteste las preguntas a continuación según la información acerca de las Opciones A y B. Muestre el método usado para cada una:

(i) Si a Uschi le costó \$ 22,50 enviar por correo un paquete usando la Opción A, ¿cuánto pesaba este paquete?

(ii) ¿Cuánto le costaría enviar por correo este mismo paquete con la Opción B?

(iii) Tomando valores adecuados de $\mathrm{A}(x) = 6 + 3x$, halle un peso (distinto de cero) para el cual el costo de ambas opciones sea el mismo. Explique su razonamiento y determine ese costo. *[6 puntos]*

SECCIÓN B

*Conteste **una** pregunta de esta sección.*

Matrices y teoría de grafos

6. *[Puntuación máxima: 30]*

(i) La *Barundi Baking Company* tiene dos locales, uno en Denver y el otro en Barcelona. Cada local tiene tres clases de empleados y, por lo tanto, tres categorías de salario semanal – uno por cada clase de trabajador.

Los empleados que trabajan en administración, ganan $ 750 por semana.
Los que trabajan como personal de oficina, ganan $ 350 por semana.
Los que trabajan en la fábrica ganan $ 200 por semana.

El número de trabajadores de cada sección en cada local es el siguiente:

En el local de Denver hay: 42 en Administración, 112 son Personal de Oficina y 316 son Operarios de Fábrica.
En el local de Barcelona hay: 22 en Administración, 56 son Personal de Oficina y 162 son Operarios de Fábrica.

(a) Construya una matriz $\boldsymbol{A}$ de 3×2 para mostrar el número de trabajadores de cada clase en cada una de las ciudades. Tenga cuidado al rotular. *[2 puntos]*

(b) (i) ¿Qué representaría la matriz $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 750 & 350 & 200 \end{pmatrix}$?

(ii) ¿Cuáles son las dimensiones de esta matriz? *[2 puntos]*

(c) Suponiendo que $\boldsymbol{CA} = \begin{pmatrix} n & 68500 \end{pmatrix}$,

(i) Calcule el valor de n.

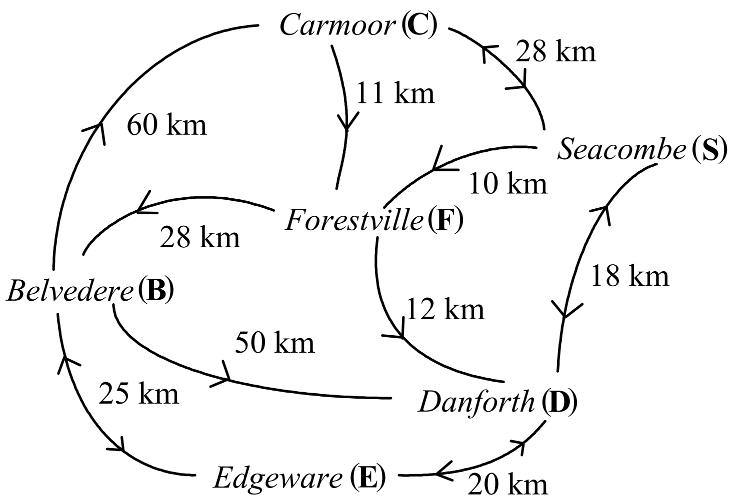
(ii) Explique el significado de este valor. *[3 puntos]*

(d) ¿Cuánto es el monto total de los salarios pagados por la *Barundi Company* en los dos locales durante cuatro semanas? *[3 puntos]*

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 6: continuación)

(ii) Los trenes recorren las siguientes rutas entre estas ciudades, como se muestra en el mapa a continuación:



(a) Halle la trayectoria más corta de *Belvedere* a *Seacombe*. *[1 punto]*

(b) Halle los valores de a, b y c, en la matriz de adyacencia a continuación, que muestran las rutas entre las ciudades.

$$\begin{array}{c} \\ \mathbf{C} \\ \mathbf{B} \\ \mathbf{E} \\ \mathbf{D} \\ \mathbf{F} \\ \mathbf{S} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \mathbf{C} & \mathbf{B} & \mathbf{E} & \mathbf{D} & \mathbf{F} & \mathbf{S} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & c & 1 & 0 & b \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

[3 puntos]

(c) Cuando nieva, es necesario despejar todas las vías. Describa una trayectoria que podría recorrer un quitanieves para despejar todas las vías de tren, sin pasar por ninguna vía más de una vez. *[3 puntos]*

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 6: continuación)

(iii) En un estudio realizado recientemente en la Onegin School se halló que, de los estudiantes que aprueban matemáticas en el noveno año, el 80 % aprueba matemáticas en el décimo año. Entre los que no aprueban matemáticas en el noveno año, el 68 % no las aprueba tampoco en el décimo año.

(a) Escriba en la matriz a continuación los valores de p, q, r y s que expresan los datos antes indicados:

estudiantes de décimo año

$$\text{estudiantes de noveno año} \quad \begin{array}{r c} & \begin{array}{cc} \text{pasa} & \text{no pasa} \end{array} \\ \begin{array}{r} \text{pasa} \\ \text{no pasa} \end{array} & \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \end{array}$$

[4 puntos]

(b) Este curso hay 300 estudiantes de noveno año que aprobaron matemáticas, y 75 que no aprobaron.

(i) Suponiendo que nadie se va de la escuela, ¿cuántos de estos estudiantes aprobarán matemáticas terminado el décimo año?

(ii) ¿Cuántos estudiantes **no** aprobarán matemáticas al final del décimo año? *[4 puntos]*

(iv) La matriz que sigue es una matriz de pagos para Bonnie y Clyde que muestra las ganancias de Bonnie:

Clyde

$$\text{Bonnie} \quad \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} \mathbf{L} & \mathbf{M} & \mathbf{N} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathbf{P} \\ \mathbf{Q} \\ \mathbf{R} \end{array} & \begin{pmatrix} 3 & 5 & -6 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

(a) Si Bonnie juega la fila **Q** y Clyde juega la columna **L**, ¿cuál será el resultado? *[1 punto]*

Una estrategia de "ir sobre seguro" es aquella que minimiza las pérdidas.

(b) ¿Qué fila debe elegir Bonnie para "ir sobre seguro"? *[1 punto]*

(c) ¿Qué fila debe elegir Clyde para "ir sobre seguro"? *[1 punto]*

(d) Si ambos jugadores deciden "ir sobre seguro", ¿quién ganará y cuánto? *[2 puntos]*

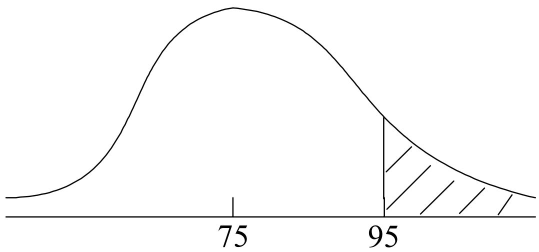
Extensión de estadística y probabilidad

7. *[Puntuación máxima: 30]*

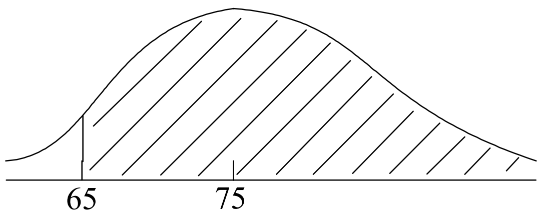
(i) Un conjunto de 1000 puntuaciones de exámenes tiene distribución normal, con media 75 y desviación típica 10.

(a) Calcule la probabilidad que representa cada uno de los siguientes diagramas; exprese sus resultados con 3 cifras decimales.

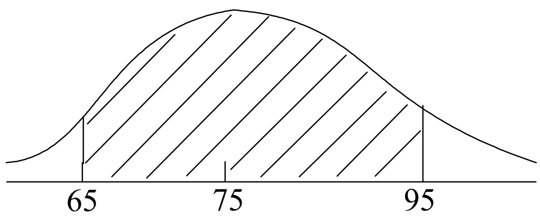
(i)



(ii)



(iii)



[6 puntos]

(b) De los mil estudiantes, ¿cuántos obtuvieron una puntuación superior a 87 en el examen? *[3 puntos]*

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 7: continuación)

(ii) En la pequeña población de *Joinville*, de 1000 habitantes, se celebraron elecciones. Los resultados fueron los siguientes:

	Votantes urbanos	Votantes rurales
Candidato A	295	226
Candidato B	313	166

En los apartados (a) a (c) a continuación, usaremos la prueba de chi cuadrado para decidir si la elección de candidato depende o no de dónde vive el votante.

Hipótesis nula H_0: la elección de candidato es independiente de dónde vive el votante.

(a) (i) Escriba la hipótesis alternativa.

(ii) Utilice la información anterior para completar *a* y *b* en la tabla a continuación.

Celda	f_o	f_e	$f_o - f_e$	$(f_o - f_e)^2$
1	295	317	–22	484
2	226	204	22	484
3	313	291	22	484
4	166	*a*	*b*	484

[3 puntos]

(b) (i) Calcule el estadístico chi cuadrado.

(ii) Escriba el número de grados de libertad.

(iii) Con un nivel de confianza del 5 %, indique el valor crítico de chi cuadrado. *[5 puntos]*

(c) (i) A partir de ello, enuncie su conclusión.

(ii) Expliqué cómo ha llegado a esta conclusión. *[2 puntos]*

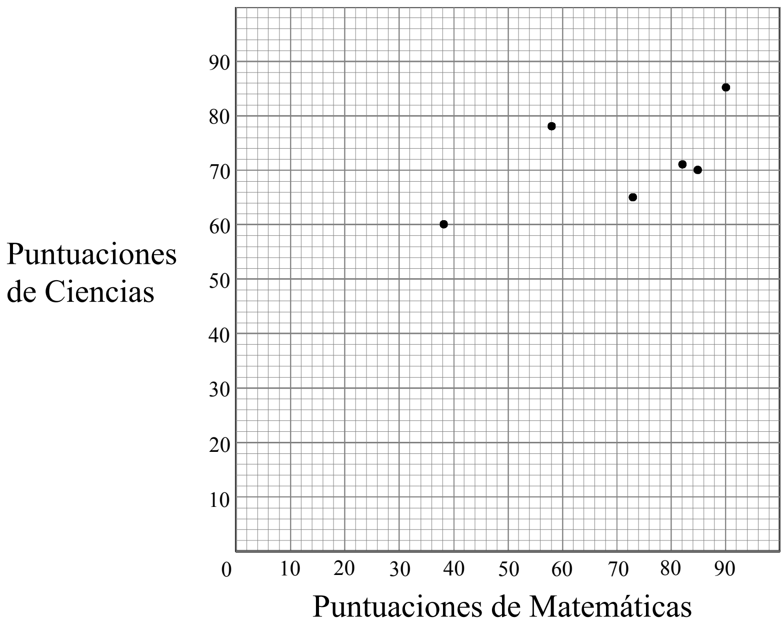
(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 7: continuación)

(iii) Los siguientes son los resultados de una investigación sobre las puntuaciones obtenidas por 10 personas en un examen de aptitud para las matemáticas (x) y un examen de aptitud para las ciencias (y):

Estudiante	**Matemáticas (x)**	**Ciencias (y)**	
1	90	85	
2	38	60	
3	58	78	$\bar{x} = 73$
4	85	70	$\bar{y} = 78$
5	73	65	
6	82	71	
7	56	80	$S_x = 16{,}7$
8	73	90	$S_y = 10{,}8$
9	95	96	$S_{xy} = 100{,}1$
10	80	85	

(a) Copie la gráfica a continuación en papel milimetrado e inserte en ella los puntos que faltan que corresponden a los estudiantes 7 a 10.



[4 puntos]

(b) Trace el punto M $(\bar{x}, \bar{y})$ en la gráfica. *[1 punto]*

(c) Halle la ecuación de la recta de regresión de y sobre x, en la forma $y = ax + b$. *[2 puntos]*

(d) Trace esta recta en la gráfica anterior. *[2 puntos]*

(e) Suponiendo que un estudiante obtiene 88 en la prueba de matemáticas, ¿qué puntuación espera que obtenga este estudiante en ciencias? Muestre cómo llegó al resultado. *[2 puntos]*

Introducción al cálculo diferencial

8. *[Puntuación maxima: 30]*

(i) Sea la función $f(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + 18$

(a) (i) Halle $f'(x)$.

(ii) Halle las coordenadas de los máximos y mínimos de la función. *[10 puntos]*

(b) Halle los valores de $f(x)$ para a y b en la tabla a continuación:

x	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	–36	a	16	b	12	4	0	6	28

[2 puntos]

(c) Usando una escala de 1 cm por cada unidad en el eje de las x y de 1 cm por cada 5 unidades en el eje de las y, trace la gráfica de $f(x)$ para $-3 \le x \le 5$. Rotule con claridad. *[5 puntos]*

(d) La pendiente de la curva en cualquier punto determinado varía. Dentro del intervalo $-3 \le x \le 5$, indique todos los intervalos en los cuales la pendiente de la curva en cualquier punto determinado es

(i) negativo.

(ii) positivo. *[3 puntos]*

(ii) La aceleración $a(t)$ en m s^{-2} de un vehículo viene dada por $a(t) = 2t - 3$, donde t es el tiempo en segundos.

(a) Cuando $t = 3$, ¿está el vehículo acelerando o decelerando? Explique por qué. *[3 puntos]*

(b) ¿Para qué valor de t el vehículo no está ni acelerando ni decelerando? *[2 puntos]*

(c) Pasados 2 segundos, la velocidad del vehículo es de $6\ \text{m s}^{-1}$.

(i) Halle $v(t)$, la velocidad del vehículo, en función de t.

(ii) ¿A qué velocidad se mueve el vehículo pasados cuatro segundos? *[5 puntos]*