ÉTUDES MATHÉMATIQUES
NIVEAU MOYEN
ÉPREUVE 2

Mardi 6 mai 2003 (matin)

2 heures

INSTRUCTIONS DESTINÉES AUX CANDIDATS

- N'ouvrez pas cette épreuve avant d'y être autorisé.
- Répondez à toutes les questions de la section A et à une question de la section B.
- Sauf indication contraire dans l'intitulé de la question, les réponses numériques devront être exactes ou à trois chiffres significatifs près .
- Veuillez indiquer la marque et le modèle de votre calculatrice dans les cases appropriées sur la page de couverture (par exemple, Casio *fx-9750G*, Sharp EL-9600, Texas Instruments TI-85).

Veuillez répondre à chaque question sur une nouvelle page. On vous recommande d'indiquer votre raisonnement autant que possible. Lorsque la réponse est fausse, certains points seront accordés si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. Les solutions obtenues à l'aide de calculatrices à écran graphique doivent être accompagnées d'un raisonnement adéquat. Par exemple, si des graphiques sont utilisés pour trouver la solution, veuillez inclure un croquis de ces graphes dans votre réponse.

SECTION A

*Répondez aux **cinq** questions de cette section.*

1. *[Note maximum : 18]*

(i) Les ensembles U, P, R et S sont définis comme suit :

$U = \{\text{tous les quadrilatères}\}$

$P = \{\text{tous les parallélogrammes}\}$

$R = \{\text{tous les rectangles}\}$

$S = \{\text{tous les carrés}\}$

(a) Dessinez un diagramme de Venn illustrant les relations entre les ensembles ci-dessus. *[4 points]*

(b) Dessinez un diagramme de Venn séparé pour chacun des exemples ci-dessous. Indiquez par des hachures pour chacun des cas suivants :

(i) $(P \cup S)'$

(ii) $(R \cup S) \cap P$ *[4 points]*

(ii) On considère chacune des propositions suivantes :

p: Alex vient de l'Uruguay
q: Alex est un scientifique
r: Alex joue de la flûte

(a) Écrivez chacun des arguments suivants en utilisant des symboles :

(i) Si Alex n'est pas un scientifique alors il ne vient pas de l'Uruguay.

(ii) Si Alex est un scientifique alors ou bien il vient de l'Uruguay ou il joue de la flûte. *[3 points]*

(b) Écrivez l'argument suivant en utilisant des mots :
$\neg r \Rightarrow \neg(q \vee p)$ *[3 points]*

(Suite de la question à la page suivante)

(Suite de la question 1(ii))

(c) Construisez une table de vérité pour l'argument de la partie (b) en utilisant les valeurs ci-dessous pour p, q, r et $\neg r$. Testez si l'argument est logiquement valable ou non.

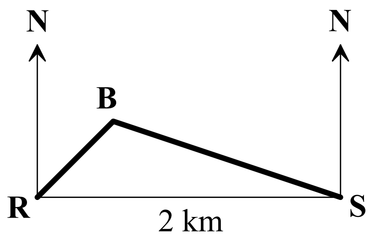
p	q	r	$\neg r$
V	V	V	F
V	V	F	V
V	F	V	F
V	F	F	V
F	V	V	F
F	V	F	V
F	F	V	F
F	F	F	V

[4 points]

2. *[Note maximum : 11]*

Raoul, dans une maison R, est de l'autre côté du lac, exactement en face de Sylvia, qui est dans une maison S. Les deux maisons sont distantes de 2 km. Alors que Raoul et Sylvia regardent tous les deux en direction du nord, ils voient un hors-bord B sur le lac entre les deux maisons. Raoul, dans la maison R, peut voir le hors-bord à 35° Est de la direction à laquelle il fait face. Sylvia, dans la maison S, peut voir le même hors-bord à 65° ouest de la direction à laquelle elle fait face.

(a) Copiez et complétez la figure ci-dessous, en précisant quel est l'angle de 35°, et quel est l'angle de 65°.



La figure n'est pas à l'échelle

[2 points]

(b) (i) Calculez la mesure de $R\hat{B}S$.

(ii) À ce moment, à quelle distance se trouve le hors-bord (B) de la maison de Raoul (R) ? Donnez s'il vous plaît votre réponse arrondie à la centaine de mètres la plus proche. *[5 points]*

(c) Raoul et Sylvia voient ensuite un voilier sur le lac au point Q, qui est à 2,6 km de Raoul (R) et à 3,5 km de Sylvia (S). Calculez la mesure de $R\hat{Q}S$ à ce moment, en donnant votre réponse arrondie au degré le plus proche. *[4 points]*

3. *[Note maximum : 13]*

Cinquante élèves de l'école de Layton High ont relevé combien d'argent chacun des élèves de leur classe a dépensé en locations de vidéo ce mois (arrondi au dollar le plus proche). Les résultats sont présentés dans le tableau d'effectifs ci-dessous :

Classe (en $)	**Frontières (en $)**	**Effectifs**
1 – 10	0,50 – 10,50	10
11 – 20	10,50 – 20,50	20
21 – 30	20,50 – 30,50	10
31 – 40	30,50 – 40,50	0
41 – 50	40,50 – 50,50	4
51 – 60	50,50 – 60,50	2
61 – 70	60,50 – 70,50	4

(a) Sur du papier millimétré, en utilisant une échelle de 2 cm pour représenter chaque intervalle (10,00 $) sur l'axe horizontal et 1 cm pour représenter 5 personnes sur l'axe vertical, dessinez et légendez clairement un histogramme des effectifs qui présente les informations précédentes. *[5 points]*

(b) Répondez aux questions suivantes :

(i) Quelle classe est la classe modale ?

(ii) Dans quelle classe est la médiane ? *[2 points]*

(c) En supposant que ces étudiants dépensent en vidéo la même somme chaque mois, trouvez la probabilité que le mois suivant un étudiant dépensera :

(i) De 21 $ à 30 $ inclus en locations de vidéo.

(ii) 30 $ ou moins en locations de vidéo.

(iii) De 41 $ à 60 $ en locations de vidéo, étant donné qu'il dépense plus de 20 $ en locations de vidéo.

(iv) Pas plus de 60 $ en locations de vidéo, étant donné qu'il dépense plus de 10 $ en locations de vidéo. *[6 points]*

4. *[Note maximum : 14]*

Le nombre de bactéries (y) présentes à chaque instant est donné par la relation :

$y = 15\,000\,\mathrm{e}^{-0,25t}$, où t est le temps en secondes et où e = 2,72 (valeur arrondie à deux chiffres après la virgule).

(a) Calculez les valeurs de a, b et c arrondies à la centaine la plus proche dans le tableau ci-dessous :

Temps en secondes (t)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Nombre de bactéries (y) (centaine la plus proche)	a	11700	9100	7100	b	4300	3300	2600	c

[3 points]

(b) Sur du papier millimétré, en utilisant 1 cm pour chaque seconde sur l'axe horizontal et 1 cm pour chaque millier sur l'axe vertical, dessinez et légendez la courbe représentant ces informations. *[5 points]*

(c) En utilisant votre courbe, répondez aux questions suivantes :

(i) Après combien de secondes y aura-t-il 5 000 bactéries ? Donnez votre réponse arrondie au dixième de seconde le plus proche.

(ii) Combien de bactéries y aura-t-il après 6,8 secondes ? Donnez votre réponse arrondie à la centaine de bactéries la plus proche.

(iii) Y aura-t-il un moment où il n'y aura plus de bactérie ? Expliquez votre réponse. *[6 points]*

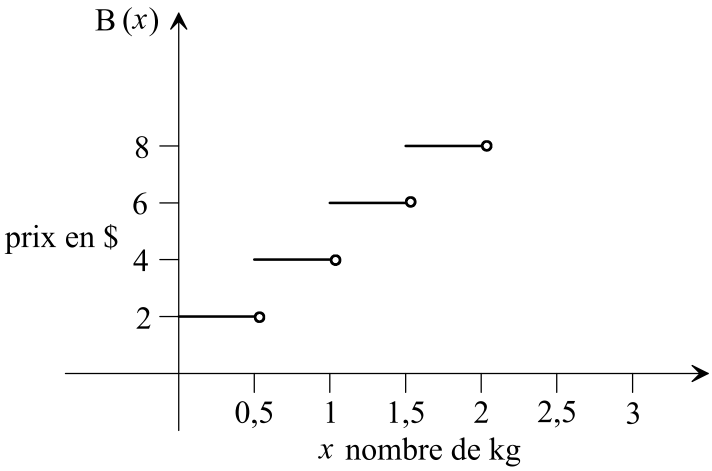
5. *[Note maximum : 14]*

(a) Uschi veut envoyer un paquet à Singapour par la poste. Elle a deux options. L'option A consiste en une taxe fixe pour envoyer un paquet, plus un prix dépendant du poids du paquet. Ces prix sont exprimés par l'expression $\mathrm{A}(x) = 6 + 3x$, où x est le poids du paquet en kg et $\mathrm{A}(x)$ est le prix total en \$ pour envoyer le paquet.

(i) Quel est la taxe fixe pour envoyer un paquet avec l'option A ?

(ii) Quel serait le prix pour envoyer un paquet pesant 2,4 kg avec l'option A ? *[3 points]*

(b) Le prix avec l'option B est représenté partiellement dans la figure ci-dessous. Le poids en kg est représenté par la variable x.



(i) La fonction $\mathrm{B}(x)$ peut être définie comme suit pour x variant entre 0 et 1 kg :

$$\mathrm{B}(x) = \begin{cases} 2 & \text{pour} \quad 0 \le x < 0{,}5 \\ 4 & \text{pour} \quad 0{,}5 \le x < 1 \end{cases}$$

Pour les poids supérieurs à 2 kg, le prix continue à augmenter par tranches de 2 \$, selon la même règle que pour les poids inférieurs.

Définissez $\mathrm{B}(x)$ pour les poids allant de 2 à 3 kg, en écrivant votre réponse comme suit :

$$\mathrm{B}(x) = \begin{cases} \_\_\_\_ & \text{pour} \quad \_\_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ & \text{pour} \quad \_\_\_\_\_\_\_\_\_ \end{cases}$$

(ii) Trouvez le prix pour envoyer un paquet pesant 1,6 kg avec l'option B. *[5 points]*

(Suite de la question à la page suivante)

(Suite de la question 5)

(c) Répondez aux questions qui suivent en fonction des informations sur les options A et B. Montrez dans chaque cas votre méthode:

(i) S'il en coûte à Uschi 22,50 $ pour envoyer un paquet avec l'option A, quel est le poids du paquet qu'elle a posté ?

(ii) Trouvez combien il lui en aurait coûté pour envoyer le même paquet avec l'option B.

(iii) En considérant des valeurs appropriées de $\mathrm{A}(x) = 6 + 3x$, trouver un poids (non nul) pour lequel le coût des deux options est le même. Expliquez votre raisonnement et donnez ce coût. *[6 points]*

SECTION B

*Répondez à **une** question de cette section.*

Matrices et théorie des graphes

6. *[Note maximum : 30]*

(i) La *Barundi Baking Company* a deux implantations, l'une à Denver et l'autre à Barcelone. Chaque implantation a trois catégories d'employés et, de ce fait, trois échelles de paie hebdomadaire, une pour chaque catégorie d'employé.

Les employés qui travaillent à la direction gagnent 750 $ par semaine.
Les employés qui travaillent dans les bureaux gagnent 350 $ par semaine.
Les employés qui travaillent à l'usine gagnent 200 $ par semaine.

Les nombres d'employés de chaque catégorie dans chacune des implantations sont les suivants :

Au site de Denver il y en a : 42 à la direction, 112 dans les bureaux et 316 à l'usine.
Au site de Barcelone il y en a: 22 à la direction, 56 dans les bureaux et 162 à l'usine.

(a) Construisez une matrice 3×2 $\boldsymbol{A}$ décrivant le nombre d'employés de chaque catégorie dans chaque ville. Légendez-la soigneusement. *[2 points]*

(b) (i) Que représenterait la matrice $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 750 & 350 & 200 \end{pmatrix}$?

(ii) Quelles sont les dimensions de cette matrice ? *[2 points]*

(c) Étant donné que $\boldsymbol{CA} = \begin{pmatrix} n & 68500 \end{pmatrix}$,

(i) Calculez la valeur de n.

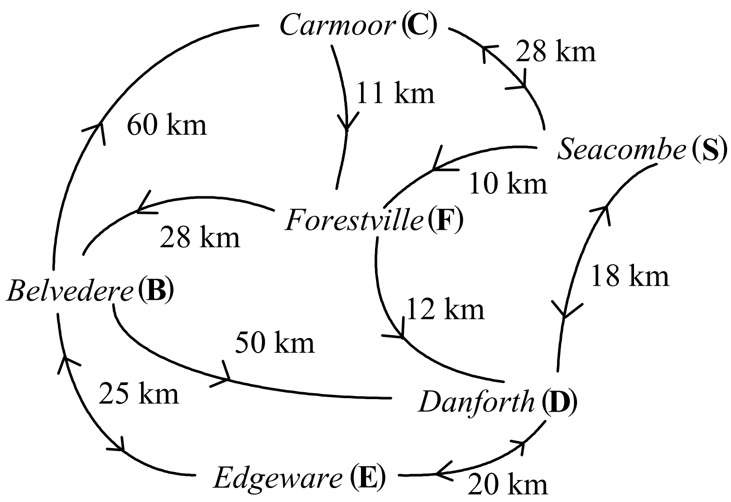
(ii) Expliquez la signification de cette valeur. *[3 points]*

(d) Quel est le montant total des salaires de la *Barundi Company* sur ces deux sites pour quatre semaines ? *[3 points]*

(Suite de la question à la page suivante)

(Suite de la question 6)

(ii) Des voies de chemin de fer relient ces villes comme le représente la carte ci-dessous :



(a) Trouvez le chemin le plus court entre *Belvedere* et *Seacombe*. *[1 point]*

(b) Trouvez les valeurs de a, b et c dans la matrice associée ci-dessous qui montre les voies de chemin de fer entre les villes.

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccc} \mathbf{C} & \mathbf{B} & \mathbf{E} & \mathbf{D} & \mathbf{F} & \mathbf{S} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathbf{C} \\ \mathbf{B} \\ \mathbf{E} \\ \mathbf{D} \\ \mathbf{F} \\ \mathbf{S} \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & c & 1 & 0 & b \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

[3 points]

(c) Quand il neige, toutes les voies doivent être dégagées. Décrivez un trajet (chaîne simple) qu'un chasse-neige pourrait suivre pour dégager toutes les voies, tel que le chasse-neige ne passe sur aucune voie plus d'une fois. *[3 points]*

(Suite de la question à la page suivante)

(Suite de la question 6)

(iii) Dans une récente étude sur l'école Onegin, on a constaté que, parmi les étudiants de neuvième année qui réussissaient leur examen de maths, 80 % réussissaient l'examen de maths en dixième année. Parmi ceux qui ne réussissaient pas leur examen de maths en neuvième année, 68 % ne le réussissaient pas non plus en dixième année.

(a) Écrivez les valeurs de p, q, r et s dans la matrice ci-dessous qui traduit les données ci-dessus :

$$\begin{array}{ll} & \text{élève de dixième année} \\ & \begin{array}{cc}\text{réussit} & \text{ne réussit pas}\end{array} \\ \text{élève de neuvième année} \begin{array}{r}\text{réussit} \\ \text{ne réussit pas}\end{array} & \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \end{array}$$

[4 points]

(b) Cette année, il y a 300 élèves de neuvième année qui ont réussi l'examen de maths, et 75 qui n'ont pas réussi.

(i) En supposant que personne ne quitte l'école, combien, parmi ces élèves réussiront l'examen de maths à la fin de leur dixième année ?

(ii) Combien d'élèves **ne** réussiront **pas** l'examen de maths à la fin de leur dixième année ? *[4 points]*

(iv) Dans un jeu entre Bonnie et Clyde, la matrice des gains ci-dessous montre les gains de Bonnie :

$$\begin{array}{lc} & \text{Clyde} \\ & \begin{array}{ccc}\mathbf{L} & \mathbf{M} & \mathbf{N}\end{array} \\ \text{Bonnie} \begin{array}{c}\mathbf{P} \\ \mathbf{Q} \\ \mathbf{R}\end{array} & \begin{pmatrix} 3 & 5 & -6 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

(a) Si Bonnie joue la ligne **Q** et Clyde joue la colonne **L**, quel sera le résultat ? *[1 point]*

Une "stratégie prudente" est une stratégie qui minimise les pertes.

(b) Quelle ligne Bonnie devrait choisir pour jouer une "stratégie prudente" ? *[1 point]*

(c) Quelle colonne Clyde devrait choisir pour jouer une "stratégie prudente" ? *[1 point]*

(d) Si les deux joueurs jouent une "stratégie prudente", qui gagnera et combien ? *[2 points]*

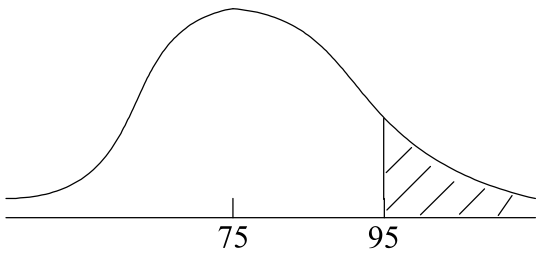
Compléments de statistiques et probabilités

7. *[Note maximum : 30]*

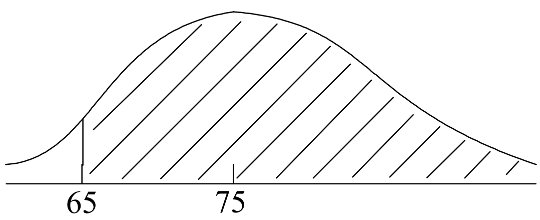
(i) Une liste de 1000 résultats d'examen est normalement distribuée, avec une moyenne de 75 et un écart-type de 10.

(a) Calculez la probabilité qui est représentée dans chacune des figures suivantes, en donnant vos réponses avec trois chiffres après la virgule.

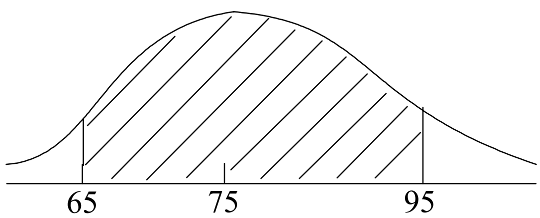
(i)



(ii)



(iii)



[6 points]

(b) Sur les mille étudiants, combien ont obtenu des résultats d'examen supérieur à 87 ? *[3 points]*

(Suite de la question à la page suivante)

(Suite de la question 7)

(ii) Des élections ont eu lieu dans la petite ville de *Joinville*, 1000 habitants. Les résultats furent les suivants:

	Électeurs Citadins	Électeurs Ruraux
Candidat A	295	226
Candidat B	313	166

Nous voulons décider si le choix fait par les électeurs dépend du lieu où ils vivent, en utilisant un test du Chi deux.

Hypothèse Nulle H_0 : Le choix fait par les électeurs est indépendant de l'endroit où ils vivent.

(a) (i) Écrivez la contre-hypothèse.

(ii) Utilisez les informations ci-dessus pour remplir *a* et *b* dans le tableau ci-dessous.

Case	f_0	f_e	$f_0 - f_e$	$(f_0 - f_e)^2$
1	295	317	–22	484
2	226	204	22	484
3	313	291	22	484
4	166	*a*	*b*	484

[3 points]

(b) (i) Calculez la statistique du Chi deux.

(ii) Écrivez le nombre de degrés de liberté.

(iii) Avec un seuil de confiance de 5 %, déterminez la valeur critique du Chi deux. *[5 points]*

(c) (i) À partir de là, formulez votre conclusion.

(ii) Sur quoi votre conclusion s'appuie-t-elle ? *[2 points]*

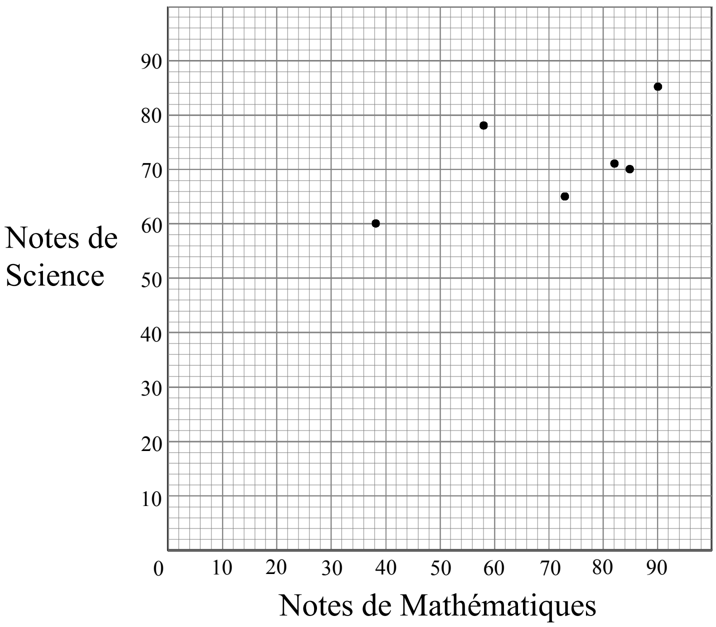
(Suite de la question à la page suivante)

(Suite de la question 7)

(iii) Ce qui suit est le résultat d'une enquête concernant les notes de 10 personnes pour deux tests d'aptitude, l'un en mathématiques (x) et l'autre en science (y) :

Étudiant	**Mathématiques (x)**	**Science (y)**	
1	90	85	
2	38	60	
3	58	78	$\overline{x} = 73$
4	85	70	$\overline{y} = 78$
5	73	65	
6	82	71	
7	56	80	$S_x = 16.7$
8	73	90	$S_y = 10.8$
9	95	96	$S_{xy} = 100.1$
10	80	85	

(a) Copiez la figure ci-dessous sur du papier millimétré et complétez-la avec les points manquant sur la figure pour les étudiants 7-10.



[4 points]

(b) Marquez le point M $(\overline{x}, \overline{y})$ sur la figure. *[1 point]*

(c) Trouvez l'équation de la droite de régression de y sur x sous la forme $y = ax + b$. *[2 points]*

(d) Tracez cette droite sur la figure ci-dessus. *[2 points]*

(e) Étant donné qu'un étudiant a eu un 88 au test de mathématiques, quelle note pouvez-vous espérer pour cet étudiant au test de science ? Montrez comment vous êtes arrivé à votre résultat. *[2 points]*

Introduction à l'analyse différentielle

8. *[Note maximum : 30]*

(i) Considérez la fonction $f(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + 18$

(a) (i) Trouvez $f'(x)$.

(ii) Trouvez les coordonnées des points maximum et minimum de la fonction. *[10 points]*

(b) Trouvez les valeurs de $f(x)$ pour a, b et c dans le tableau ci-dessous :

x	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	–36	a	16	b	12	4	0	6	28

[2 points]

(c) En utilisant une échelle de 1 cm pour chaque unité sur l'axe des abscisses Ox et 1 cm pour 5 unités sur l'axe des ordonnées Oy, dessinez la courbe de $f(x)$ pour $-3 \le x \le 5$. Légendez clairement. *[5 points]*

(d) La pente de la courbe en n'importe quel point varie. Dans l'intervalle $-3 \le x \le 5$, donnez tous les intervalles sur lesquels la pente de la courbe en n'importe quel point est

(i) négative.

(ii) positive. *[3 points]*

(ii) L'accélération $a(t)$ en m s^{-2} d'un véhicule est donnée par $a(t) = 2t - 3$, où t est le temps en secondes.

(a) Est-ce que ce véhicule est en accélération ou en décélération quand $t = 3$? Expliquez pourquoi. *[3 points]*

(b) Pour quelle valeur de t, le véhicule n'est-il ni en accélération ni en décélération ? *[2 points]*

(c) Après 2 secondes, la vitesse du véhicule est $6\ \text{m s}^{-1}$.

(i) Trouvez $v(t)$, la vitesse du véhicule, en fonction de t.

(ii) À quelle vitesse le véhicule se déplace-t-il après 4 secondes ? *[5 points]*