MÉTODOS MATEMÁTICOS
NIVEL MEDIO
PRUEBA 2

Lunes 11 de noviembre de 2002 (mañana)

2 horas

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste las cinco preguntas de la Sección A y una pregunta de la Sección B.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o con tres cifras significativas.
- Escriba la marca y el modelo de su calculadora en la portada de su cuadernillo de respuestas (p. ej., Casio *fx-9750G*, Sharp EL-9600, Texas Instruments TI-85).

Empiece una página nueva para cada respuesta. Se recomienda que muestre todos los cálculos, siempre que sea posible. Para los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el proceso seguido hasta su obtención. Por ejemplo, cuando deba utilizar gráficas de una calculadora de pantalla gráfica para hallar soluciones, deberá dibujar esas gráficas en su respuesta. Una respuesta incorrecta sin indicación del método utilizado no recibirá normalmente ***ningún*** *punto.*

SECCIÓN A

Conteste las ***cinco*** *preguntas de esta sección.*

1. *[Puntuación máxima: 15]*

En un suburbio de una gran ciudad se vendieron 100 casas en un período de tres meses. La **tabla de frecuencias acumuladas** a continuación muestra la distribución de los precios de venta (en miles de dólares).

Precio de venta P (\$ 1000)	$P \leq 100$	$P \leq 200$	$P \leq 300$	$P \leq 400$	$P \leq 500$
Número total de casas	12	58	87	94	100

(a) Represente esta información sobre una **curva** de frecuencias acumuladas usando una escala de 1 cm para representar \$ 50 000 en el eje horizontal, y 1 cm para representar 5 casas en el eje vertical. *[4 puntos]*

(b) Use la curva para hallar el rango intercuartil. *[3 puntos]*

La información anterior se representa en la siguiente distribución de frecuencias.

Precio de venta P (\$ 1000)	$0 < P \leq 100$	$100 < P \leq 200$	$200 < P \leq 300$	$300 < P \leq 400$	$400 < P \leq 500$
Número de casas	12	46	29	a	b

(c) Halle el valor de a y de b. *[2 puntos]*

(d) Use valores centrales de intervalo para calcular una estimación del precio de venta medio. *[2 puntos]*

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 1: continuación)

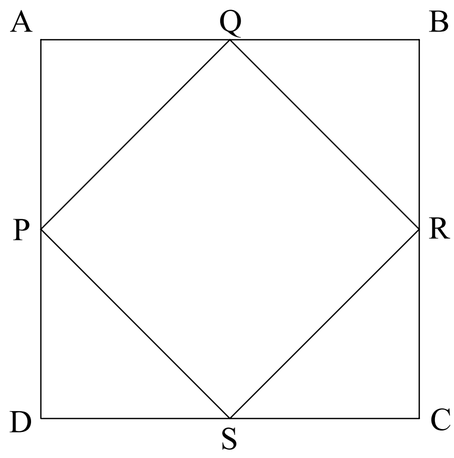
(e) Las casas que se venden por más de $ 350 000 se describen como *De Luxe*.

(i) Use la gráfica para estimar el número de casas *De Luxe* vendidas. Exprese su respuesta redondeada al entero más próximo.

(ii) Se eligen al azar dos casas *De Luxe*. Halle la probabilidad de que **ambas** tengan un precio de venta superior a $ 400 000. *[4 puntos]*

2. *[Puntuación máxima: 10]*

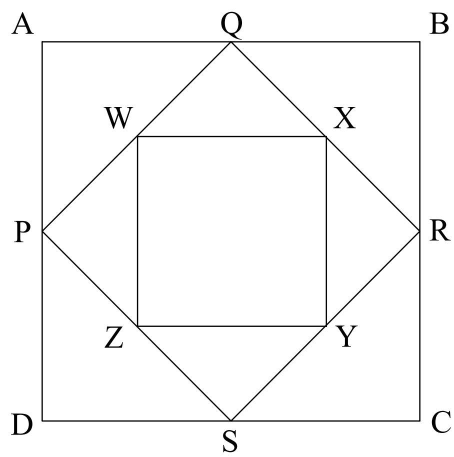
En la figura aparece un cuadrado ABCD de 4 cm de lado. Los puntos medios P, Q, R, S de los lados se unen entre sí formando un **segundo** cuadrado.



(a) (i) Muestre que $PQ = 2\sqrt{2}$ cm.

(ii) Halle el área de PQRS. *[3 puntos]*

Los puntos medios W, X, Y, Z de los lados de PQRS se unen ahora para formar un **tercer** cuadrado, como aparece en la figura.



(b) (i) Escriba el área del **tercer** cuadrado, WXYZ.

(ii) Muestre que las áreas de ABCD, PQRS, y WXYZ forman una sucesión geométrica. Halle la razón común de esta sucesión. *[3 puntos]*

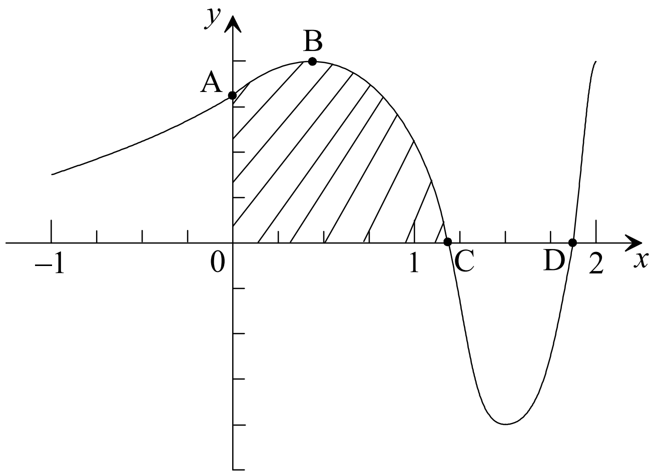
El proceso de formar cuadrados más y más pequeños (uniendo los puntos medios) **se continúa en forma indefinida**.

(c) (i) Halle el área del 11º cuadrado.

(ii) Calcule la suma de las áreas de **todos** los cuadrados. *[4 puntos]*

3. *[Puntuación máxima: 18]*

El diagrama a continuación muestra un esbozo de la gráfica de la función $y = \operatorname{sen}\left(e^x\right)$ donde $-1 \le x \le 2$, y x está en radianes. La gráfica corta al eje de las y en A, y al eje de las x en C y en D. Tiene un punto de máximo en B.



(a) Halle las coordenades de A. *[2 puntos]*

(b) Las coordenades de C se pueden expresar como $(\ln k, 0)$. Halle el valor **exacto** de k. *[2 puntos]*

(c) (i) Escriba la ordenada y de B.

(ii) Halle $\dfrac{dy}{dx}$.

(iii) A partir de allí, muestre que en el punto B, $x = \ln\dfrac{\pi}{2}$. *[6 puntos]*

(d) (i) Escriba la integral que representa el área de la región sombreada.

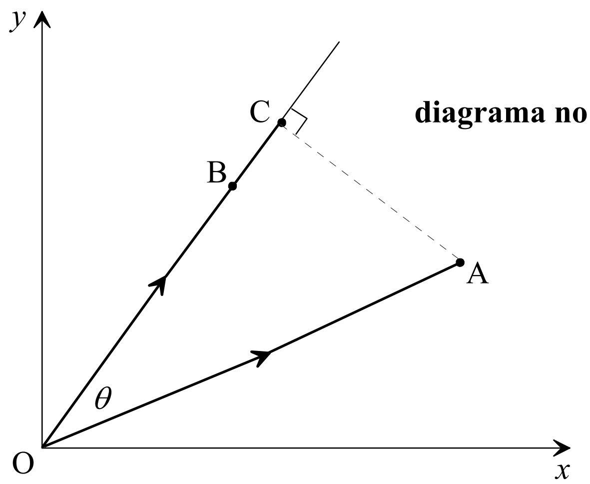
(ii) Evalúe esta integral. *[5 puntos]*

(e) (i) Copie el diagrama anterior a su cuadernillo de respuestas. (No es necesario copiar el sombreado.) Trace la gráfica de $y = x^3$ en el diagrama.

(ii) Las dos gráficas se cortan en el punto P. Halle la abscisa x de P. *[3 puntos]*

4. *[Puntuación máxima: 12]*

En el diagrama a continuación aparece el punto O de coordenadas $(0, 0)$, el punto A con vector de posición $\boldsymbol{a} = 12\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j}$, y el punto B con vector de posición $\boldsymbol{b} = 6\boldsymbol{i} + 8\boldsymbol{j}$. El ángulo formado por (OA) y (OB) es θ.



Halle

(a) (i) $|\boldsymbol{a}|$;

(ii) un vector unitario en la dirección de $\boldsymbol{b}$;

(iii) el valor **exacto** de $\cos\theta$ expresado como $\frac{p}{q}$, donde $p, q \in \mathbb{Z}$. *[6 puntos]*

El punto C es el pie de la perpendicular trazada desde A a (OB). El vector de posición de C está dado por $\boldsymbol{c}$.

(b) (i) Halle la proyección escalar de $\boldsymbol{a}$ en la dirección de $\boldsymbol{b}$.

(ii) Halle $\boldsymbol{c}$ y exprese su respuesta en la forma $m\boldsymbol{i} + n\boldsymbol{j}$, donde se han de hallar m y n.

(iii) Calcule $|\mathbf{AC}|$. *[6 puntos]*

5. *[Puntuación máxima: 15]*

En esta pregunta, s representa el desplazamiento en metros y t representa el tiempo en segundos.

(a) Se puede expresar la velocidad $v\,\text{ms}^{-1}$ de un cuerpo en movimiento como $v = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 30 - at$, donde a es una constante. Dado que $s = 0$ para $t = 0$, halle una expresión de s en función de a y de t. *[5 puntos]*

Los trenes que se acercan a una estación comienzan a disminuir su velocidad cuando pasan una señal a 200 m de la estación.

(b) La velocidad del Tren 1, t segundos después de pasar la señal, está dada por $v = 30 - 5t$.

(i) Escriba su velocidad cuando pasa junto a la señal.

(ii) Muestre que se detendrá antes de llegar a la estación. *[5 puntos]*

(c) El Tren 2 disminuye su velocidad de manera tal que se detiene en la estación. Su velocidad está dada por $v = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 30 - at$, donde a es una constante.

(i) Halle el tiempo que le lleva detenerse en función de a.

(ii) Utilice sus soluciones de las partes (a) y (c)(i) para hallar el valor de a. *[5 puntos]*

SECCIÓN B

*Conteste **una** pregunta de esta sección.*

Métodos estadísticos

6. *[Puntuación máxima: 30]*

(i) En un país llamado *Tallopia* la estatura de los adultos tiene distribución normal, con media 187,5 cm y desviación típica 9,5 cm.

(a) ¿Qué porcentaje de los adultos de *Tallopia* tiene estatura superior a 197 cm? *[3 puntos]*

(b) Las puertas estándar de *Tallopia* están diseñadas de modo tal que al 99 % de los adultos les sobran por lo menos 17 cm por encima de la cabeza cuando pasan por una puerta. Halle la altura de una puerta estándar en *Tallopia*. Exprese su respuesta redondeada al cm más próximo. *[4 puntos]*

(c) La estatura (en cm) de los niños de seis años de *Tallopia* tiene una desviación típica de 4,5. Sean $x_1, x_2, \ldots x_{20}$ las estaturas (en cm) de 20 niños de *Tallopia* elegidos aleatoriamente. Se halla que $\sum_{i=1}^{20} x_i = 2412$.

(i) Halle un intervalo de confianza del 95 % para la altura media de todos los niños de seis años de *Tallopia*. Exprese los límites **redondeados al 0,1 cm más próximo**.

(ii) ¿Qué probabilidad hay de que el intervalo hallado en la parte (i) no contenga la media? *[5 puntos]*

(ii) Una muestra de 10 pares de valores $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \ldots (x_{10}, y_{10})$ tiene las siguientes estadísticas:

$\bar{x} = 56{,}45$; $\bar{y} = 63{,}12$; $s_x = 10{,}25$; $s_y = 12{,}14$; $s_{xy} = 74{,}66$.

El coeficiente de correlación producto-momento entre las variables x y y es $r = 0{,}6$.

(a) Si aumenta el valor de x, ¿deberá el valor de y aumentar, disminuir o permanecer igual? *[1 punto]*

(b) Halle la ecuación de la recta de regresión de mínimos cuadrados de y sobre x, y exprese su respuesta de la forma $y = mx + c$. *[3 puntos]*

(c) Prediga el valor de y cuando $x = 76$. *[2 puntos]*

(d) Explique, por medio de un diagrama sencillo, el significado de la recta de regresión de mínimos cuadrados de y sobre x. *[4 puntos]*

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 6: continuación)

(iii) Una encuesta respecto a una propuesta de prohibir la caza de osos arrojó los datos que siguen.

	A favor	En contra
Residente urbano	390	120
Residente rural	160	30

(a) Suponiendo que la actitud hacia la prohibición es independiente de si la persona vive en una zona urbana o rural, se calcula una tabla de frecuencias esperadas para los datos anteriores. A continuación aparece parte de la tabla.

	A favor	En contra
Residente urbano	400,7	a
Residente rural	b	c

Halle los valores de a, b y c. *[3 puntos]*

(b) Calcule la estadística χ^2. *[2 puntos]*

(c) Deseamos probar, con nivel de significación del 5% la afirmación de que la actitud hacia la prohibición es independiente de si la persona vive en una zona urbana o rural.

(i) Una vez realizada la prueba, enuncie su conclusión.

(ii) Indique las razones de su conclusión. *[3 puntos]*

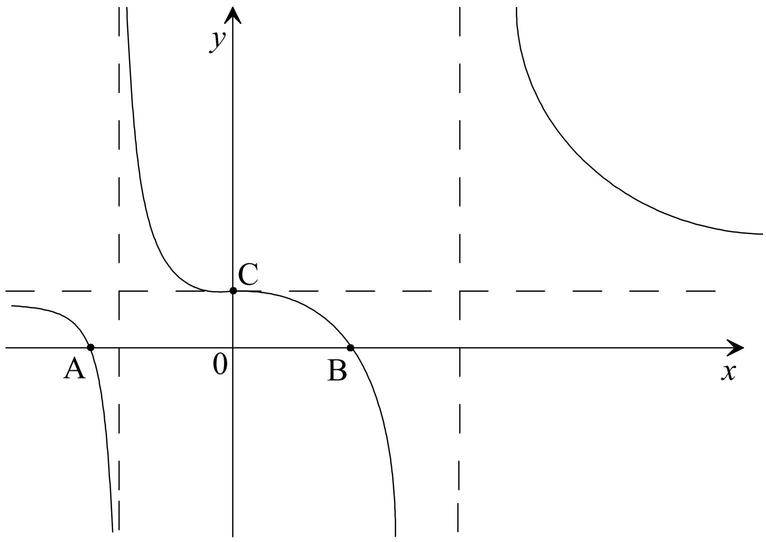
Extensión de análisis

7. *[Puntuación máxima: 30]*

(i) Sea $g(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 2$.

(a) Resuelva $g(x) = 0$. *[2 puntos]*

Sea $f(x) = \dfrac{2x^3}{g(x)} + 1$. A continuación aparece parte de la gráfica de $f(x)$.



(b) La gráfica tiene asíntotas verticales, de ecuaciones $x = a$ y $x = b$ donde $a < b$. Escriba los valores de

(i) a;

(ii) b. *[2 puntos]*

(c) La gráfica tiene una asíntota horizontal, de ecuación $y = 1$. Explique por qué el valor de $f(x)$ tiende a 1 cuando x se hace muy grande. *[2 puntos]*

(d) La gráfica corta al eje de las x en los puntos A y B. Escriba el valor **exacto** de la abscisa x en

(i) A;

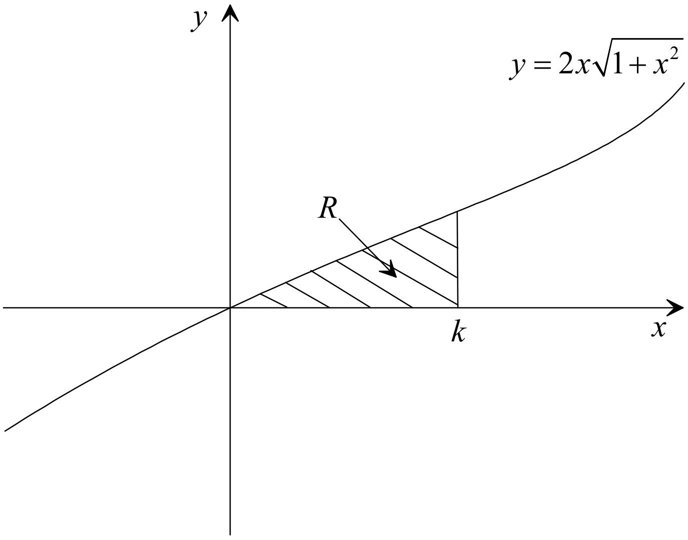
(ii) B. *[2 puntos]*

(e) La curva corta el eje de las y en C. **Use la gráfica** para explicar por qué los valores de $f'(x)$ y $f''(x)$ son cero en el punto C. *[2 puntos]*

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 7: continuación)

(ii) En el diagrama que sigue se muestra la región sombreada R encerrada por la gráfica de $y = 2x\sqrt{1+x^2}$, el eje de las x y la recta vertical $x = k$.



(a) Halle $\dfrac{dy}{dx}$. *[3 puntos]*

(b) Por medio de la substitución $u = 1 + x^2$ o de alguna otra manera, muestre que

$$\int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{2}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}} + c.$$ *[3 puntos]*

(c) Dado que el área de R es 1, halle el valor de k. *[3 puntos]*

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 7: continuación)

(iii) Considere la función $h(x) = x^{\frac{1}{5}}$.

(a) (i) Halle la ecuación de la tangente a la gráfica de h en el punto en el cual $x = a, (a \neq 0)$. Escriba la ecuación en la forma $y = mx + c$.

(ii) Muestre que esta tangente corta el eje de las x en el punto $(-4a, 0)$. *[5 puntos]*

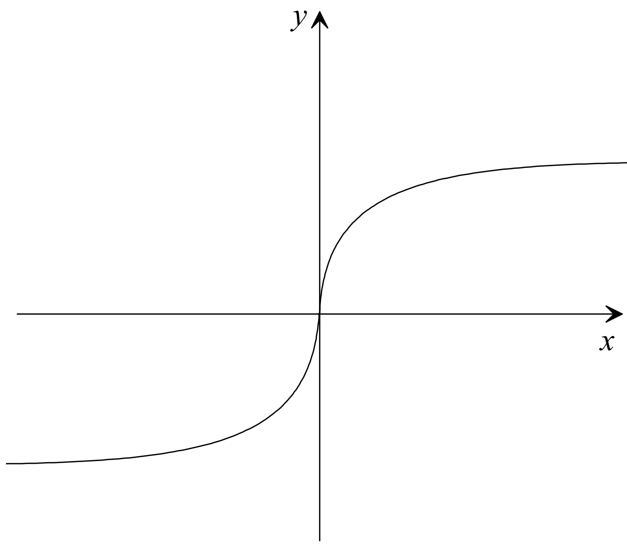
Un alumno no se da cuenta de la solución obvia, $x = 0$, e intenta resolver la ecuación por el método Newton-Raphson.

(b) Tomando $x_1 = 0,5$ y usando los resultados de la parte (a) o de alguna otra manera, calcule

(i) x_2;

(ii) x_5. *[3 puntos]*

(c) Copie la siguiente gráfica de $h(x)$.



Trazando las tangentes pertinentes en la gráfica, indique claramente las posiciones de x_2 y x_3. *[3 puntos]*

Extensión de geometria

8. *[Puntuación máxima: 30]*

(i) (a) Escriba las matrices que representan las siguientes transformaciones.

(i) $\boldsymbol{P}$: una reflexión en el eje de las x;

(ii) $\boldsymbol{Q}$: una homotecia de factor de escala 5, paralela al eje de las y. *[2 puntos]*

(b) La transformación elemental $\boldsymbol{E}_1$ está dada por $\boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{PQ}$.
La transformación $\boldsymbol{M}$ es la composición de las transformaciones elementales $\boldsymbol{E}_3$, $\boldsymbol{E}_2$ y $\boldsymbol{E}_1$, donde $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{E}_3\,\boldsymbol{E}_2\,\boldsymbol{E}_1$,
$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{E}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

(i) Muestre que $\boldsymbol{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$.

(ii) Halle $\boldsymbol{E}_2$. *[6 puntos]*

El triángulo ABC está definido por $\mathrm{A}(1, 0)$, $\mathrm{B}(1, 2)$ y $\mathrm{C}(3, 0)$. El triángulo $\mathrm{A'B'C'}$ es la imagen del triángulo ABC bajo la transformación $\boldsymbol{M}$.

(c) (i) Calcule las coordenadas de $\mathrm{A'}$, $\mathrm{B'}$, y $\mathrm{C'}$.

(ii) Dibuje y rotule el triángulo $\mathrm{A'B'C'}$ en papel milimetrado, a una escala en la cual 1 cm representa 1 unidad.

(iii) Halle el área del triángulo $\mathrm{A'B'C'}$. *[6 puntos]*

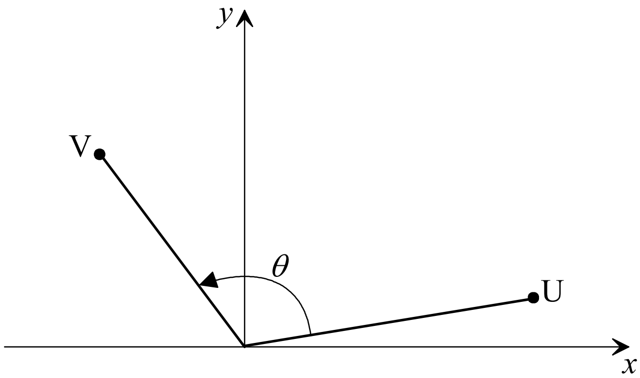
(d) Halle la imagen de la recta con ecuación $y = -x + 3$ bajo $\boldsymbol{M}$, expresando su respuesta en la forma $y = mx + c$. *[4 puntos]*

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 8: continuación)

(ii) Los puntos U y V tienen vectores de posición $\boldsymbol{u} = 7\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$ y $\boldsymbol{v} = -5\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j}$ respectivamente.

(a) Una rotación $\boldsymbol{R}$ de ángulo θ alrededor de (0, 0) transforma a U en V, como se muestra en la siguiente figura.



(i) Represente esta información en forma de ecuación matricial.

(ii) Halle la matriz $\boldsymbol{R}$ que representa a esta transformación. *[6 puntos]*

(b) Otra rotación $\boldsymbol{Q}$, de 90° alrededor del punto (h, k) también transforma a U en V. Se puede representar la rotación $\boldsymbol{Q}$ por

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \boldsymbol{T}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

donde $\boldsymbol{T}$ denota una rotación de 90° alrededor de (0, 0).

Calcule

(i) el valor de a y de b;

(ii) el valor de h y de k. *[6 puntos]*