IB DIPLOMA PROGRAMME
PROGRAMME DU DIPLÔME DU BI
PROGRAMA DEL DIPLOMA DEL BI

ESTUDIOS MATEMÁTICOS
NIVEL MEDIO
PRUEBA 2

Lunes 11 de noviembre de 2002 (mañana)

2 horas

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste las cinco preguntas de la Sección A y una pregunta de la Sección B.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o con tres cifras significativas.
- Escriba la marca y el modelo de su calculadora en la portada de su cuadernillo de respuestas (p. ej., Casio *fx-9750G*, Sharp EL-9600, Texas Instruments TI-85).

*Empiece una nueva página para cada respuesta. Se recomienda que muestre todos los cálculos, siempre que sea posible. Para los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el proceso seguido hasta su obtención. Por ejemplo, cuando deba utilizar gráficas de una calculadora de pantalla gráfica para hallar soluciones, deberá dibujar esas gráficas en su respuesta. Una respuesta incorrecta sin indicación del método utilizado no recibirá normalmente **ningún** punto.*

SECCIÓN A

*Conteste las **cinco** preguntas de esta sección.*

1. *[Puntuación máxima: 12]*

(i) Los pesos en kilogramos de 12 estudiantes de una clase son:

63 76 99 65 63 51 52 95 63 71 65 83

(a) Indique el valor de la moda. *[1 punto]*

(b) Calcule

(i) el peso medio;

(ii) la desviación típica de los pesos. *[2 puntos]*

Cuando uno de los estudiantes deja la clase, el peso medio de los 11 estudiantes que quedan pasa a ser 70 kg.

(c) Halle el peso del estudiante que se ha ido. *[2 puntos]*

(ii) Se pesa a los 400 estudiantes de una escuela.

La siguiente tabla muestra la distribución de sus pesos.

Peso del estudiante (w)	Frecuencia	Densidad de frecuencia
$40 \leq w < 60$	80	s
$60 \leq w < 70$	120	12
$70 \leq w < 80$	110	t
$80 \leq w < 100$	90	4,5

(a) Calcule los valores de s y de t. *[2 puntos]*

(b) Tomando una escala en la cual 1 cm representa 10 kg en el eje de las x, mientras que 1 cm representa una densidad de frecuencia 2 en el eje de las y, represente esta información en un histograma de **densidad de frecuencia**. *[3 puntos]*

(c) ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante pese menos de 70 kg? *[2 puntos]*

2. *[Puntuación máxima: 15]*

Bob alquila botes en un lago. Tiene dos tipos de botes, kayaks y canoas. Todos los días alquila no menos de 10 kayaks y no menos de 25 canoas.

El máximo número de botes que pueden navegar en el lago en un momento dado es de 60.

Bob alquila por lo menos el doble de canoas que de kayaks.

Sea x el número de kayaks alquilados por día, y sea y el número de canoas alquiladas por día.

(a) Explique por qué $y \geq 2x$. *[1 punto]*

(b) Escriba tres inecuaciones más que representen la información anterior. *[3 puntos]*

(c) Usando una escala en que 2 cm representan 10 kayaks en el eje de las x mientras que 2 cm representan 10 canoas el el eje de las y, dibuje gráficas que representen las cuatro inecuaciones. *[5 puntos]*

(d) (i) Sombree la región (R) que satisface a las cuatro inecuaciones.

(ii) Escriba las coordenadas de los vértices de esta región. *[3 puntos]*

Bob cobra GBP 25 por día por un kayak y GBP 40 por día por una canoa.

(e) Escriba una ecuación que represente la cantidad (A) que cobra Bob en un día. *[1 punto]*

(f) Calcule la cantidad máxima que puede cobrar Bob en un día. *[2 puntos]*

3. *[Puntuación máxima: 14]*

Cuando cumplió 18 años, Vera recibió una mesada de sus padres. Se le dieron las siguientes opciones.

Opción A $100 todos los meses del año.
Opción B Una suma fija de $1100 al principio del año, a ser invertida a una tasa de interés del 12% anual compuesto mensualmente.
Opción C $75 el primer mes y un aumento de $5 por mes en adelante.
Opción D $80 el primer mes y un aumento del 5% todos los meses.

(a) Suponiendo que Vera no gaste nada de su mesada durante el año, calcule para cada una de las opciones cuánto dinero tendría al terminar el año. *[8 puntos]*

(b) ¿Cuál de las opciones piensa usted que Vera debe elegir? Justifique su respuesta. *[2 puntos]*

(c) Al cumplir 19 años, Vera invierte $1200 en un banco que paga intereses a una tasa del r% anual, compuesto anualmente. A Vera le gustaría comprar una motocicleta que cuesta $1452 cuando cumpla 21 años. ¿Qué tasa tendría que ofrecerle el banco para permitirle comprar la motocicleta? *[4 puntos]*

4. *[Puntuación máxima: 14]*

Los lados de un lago triangular están definidos por los vectores $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ y $\overrightarrow{BC}$, donde $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \end{pmatrix}$ y $\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

(a) (i) En papel cuadriculado, usando una escala en la cual 1 cm representa una unidad en ambos ejes, dibuje el lago OBC con O como origen.

(ii) Escriba el vector $\overrightarrow{CB}$ en forma de componentes.

(iii) Calcule $|\overrightarrow{CB}|$. *[6 puntos]*

Hay un sendero a lo largo de los bordes del lago.

(b) Dado que $|\overrightarrow{OB}| = 6{,}32$ km y $|\overrightarrow{OC}| = 5$ km,

(i) escriba la longitud total del sendero;

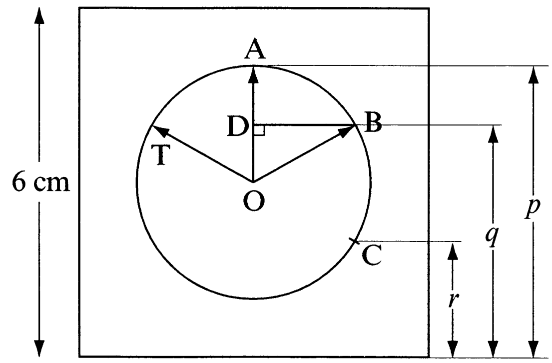
(ii) calcule la magnitud del ángulo BOC ;

(iii) calcule el área del lago. *[6 puntos]*

(c) Un halcón está volando a una altura de 800 **metros** justo por encima del vértice C. Las coordenadas del halcón son (–3, 4, 0,8). El halcón divisa un pez en el lago, en el punto (–2, 2, 0). ¿A qué distancia está el halcón del pez? *[2 puntos]*

5. *[Puntuación máxima: 15]*

La figura que sigue representa un cronómetro. Es una circunferencia de centro O, que está dentro de un cuadrado de lado 6 cm y con centro también en O. El cronómetro tiene dos agujas: un minutero y un segundero. El segundero, de extremo T, aparece en la figura; tiene un radio de 2 cm.



(a) Cuando T está en el punto A, la distancia más corta desde T a la base del cuadrado es p. Calcule el valor de p. *[2 puntos]*

(b) T se desplaza desde el punto A al punto B en 10 segundos. Cuando T está en el punto B, la distancia más corta desde T a la base del cuadrado es q. Calcule :

(i) la magnitud del ángulo AOB ;

(ii) la distancia OD ;

(iii) el valor de q. *[5 puntos]*

(c) En otros 10 segundos T se desplaza desde el punto B al punto C. Cuando T está en el punto C, la distancia más corta desde T a la base del cuadrado es r. Calcule el valor de r. *[4 puntos]*

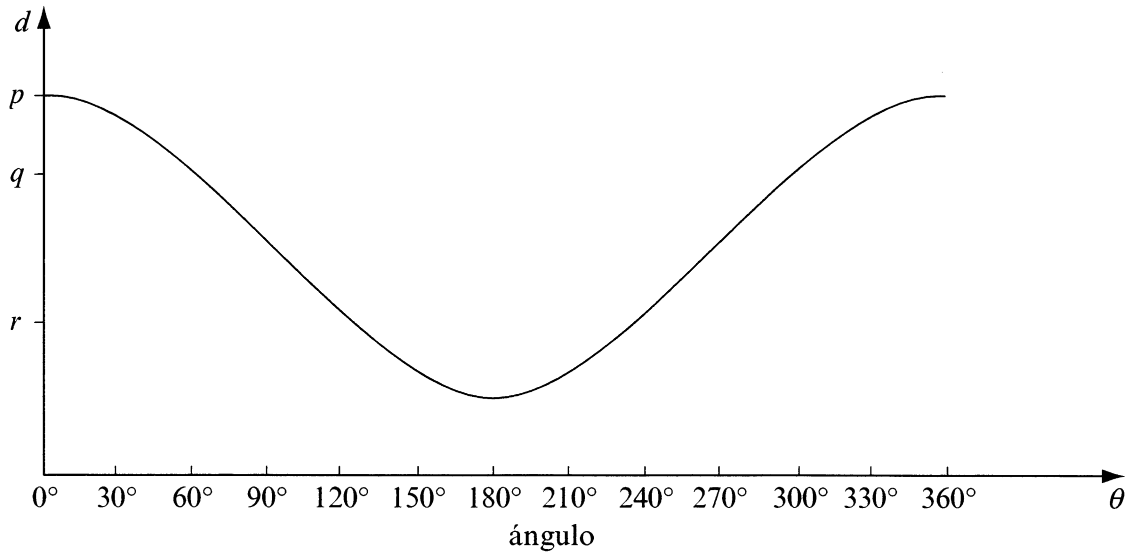
Sea d la distancia más corta desde T a la base del cuadrado, cuando el segundero se ha desplazado a través de un ángulo θ. La siguiente tabla da los valores de d y de θ.

Ángulo θ	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
Distancia d	p	4,7	q	3	r	1,3	1	1,3	r	3	q	4,7	p

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 5: continuación)

La gráfica que representa esta información es la siguiente.



La ecuación de esta gráfica se puede escribir como $d = c + k\cos(\theta)$.

(d) Halle el valor de c y de k . *[4 puntos]*

SECCIÓN B

*Conteste **una** pregunta de esta sección.*

6. *[Puntuación máxima: 30]*

(i) Considere las matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & x \\ y & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -6 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -3 & -1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} p & -6 \\ 3 & q \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 2m & 4 \\ 8 & m \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} n & 3 \\ 3 & -n \end{pmatrix}$$

(a) Calcule $\boldsymbol{B} - 2\boldsymbol{C}$. *[2 puntos]*

(b) Si $2\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{D}$, halle los valores de x, y, p y q. *[5 puntos]*

(c) Si $\boldsymbol{E}$ es una matriz singular, halle los valores de m. *[3 puntos]*

(d) Si $\boldsymbol{F}^2 = 9\boldsymbol{I}$ donde $\boldsymbol{I}$ es la matriz identidad de 2×2, demuestre que $n = 0$. *[3 puntos]*

(ii) La siguiente matriz de adyacencia $\boldsymbol{M}$ de un dígrafo muestra el número de caminos que unen 4 ciudades: P, Q, R y S.

$$\text{Desde} \quad \begin{array}{c} \\ \\ \text{P} \\ \text{Q} \\ \text{R} \\ \text{S} \end{array} \begin{array}{c} \text{A} \\ \begin{array}{cccc} \text{P} & \text{Q} & \text{R} & \text{S} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

(a) Dibuje el dígrafo que representa la información anterior. *[4 puntos]*

(b) Dado que $\boldsymbol{M}^2 = \begin{pmatrix} a & 6 & 4 & 7 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 7 & b & 3 & 6 \end{pmatrix}$

calcule el valor de a y el valor de b. *[4 puntos]*

(c) ¿Cuántas maneras hay de ir desde P hasta S en dos etapas? *[1 punto]*

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 6: continuación)

(iii) Se preguntó a 200 estudiantes con qué frecuencia iban al cine.

De los estudiantes que habían ido al cine el último fin de semana, el 80 % pensaba ir el fin de semana siguiente.

De los que no habían ido al cine el último fin de semana, el 30 % pensaba ir el fin de semana siguiente.

(a) Copie y rellene la matriz $\boldsymbol{T}$ a continuación para representar la información dada.

$$\begin{array}{lll} & & \text{último fin de semana} \\ & & \begin{array}{cc}\text{Cine} & \text{No al cine}\end{array} \\ \begin{array}{l}\text{fin de}\\ \text{semana}\\ \text{siguiente}\end{array} & \begin{array}{l}\text{Cine}\\ \\ \text{No al cine}\end{array} & \begin{pmatrix} 0{,}8 & \phantom{0{,}00} \\ & \end{pmatrix} \end{array}$$

[3 puntos]

De los 200 estudiantes el 60 % había ido al cine el último fin de semana.

(b) ¿Cuántos estudiantes fueron al cine el último fin de semana? *[1 punto]*

(c) Calcule el número de estudiantes que irán al cine el fin de semana siguiente. *[2 puntos]*

(d) Dado que $\boldsymbol{T}^2 = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}45 \\ 0{,}3 & 0{,}55 \end{pmatrix}$

calcule el número de estudiantes que no irán al cine dentro de dos fines de semana. *[2 puntos]*

7. *[Puntuación máxima: 30]*

(i) Un club de adelgazamiento tiene 500 socios.

(a) Se considera que el peso perdido (w kg) durante un año tiene una distribución normal, con una media de 18,5 kg y una desviación típica de 5 kg. Si esto es cierto, calcule el número de socios que han perdido:

(i) 20 kg o más en un año;

(ii) menos de 15 kg en un año. *[6 puntos]*

La siguiente tabla muestra las frecuencias esperadas de pérdida de peso w.

Peso perdido (kg)	Frecuencia esperada
$0 \le w < 10$	22
$10 \le w < 15$	a
$15 \le w < 20$	188
$20 \le w < 25$	b
$25 \le w < 30$	43
$30 \le w < 40$	5

(b) Usando sus respuestas de la parte (a) o de alguna otra manera, calcule el valor de a y el valor de b. *[2 puntos]*

Al final del año se pesa a los 500 socios para determinar si los resultados tienen de hecho, una distribución normal, con una media de 18,5 kg y una desviación típica de 5 kg. Los resultados aparecen en la tabla a continuación.

Peso perdido	Frecuencia observada
$0 \le w < 10$	24
$10 \le w < 15$	70
$15 \le w < 20$	131
$20 \le w < 25$	164
$25 \le w < 30$	83
$30 \le w < 40$	28

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 7: continuación)

(c) Se realiza una prueba chi cuadrado, a nivel de significación 5%, para investigar los resultados.

(i) Enuncie la hipótesis nula.

(ii) Enuncie el número de grados de libertad.

(iii) Calcule el valor de chi cuadrado.

(iv) Escriba el valor crítico de chi cuadrado.

(v) Indique si aceptaría o rechazaría la hipótesis nula, y justifique su respuesta. *[8 puntos]*

(ii) Un tendero quería investigar si había o no una correlación entre los precios de los alimentos hace 10 años, en 1992, y sus precios actuales. Eligió 8 artículos de uso diario cuyos precios se dan en la siguiente tabla.

	azúcar	leche	huevos	panecillos	saquitos de té	café	patatas	harina
Precio en 1992	\$ 1,44	\$ 0,80	\$ 2,16	\$ 1,80	\$ 0,92	\$ 3,16	\$ 1,32	\$ 1,12
Precio en 2002	\$ 2,20	\$ 1,04	\$ 2,64	\$ 3,00	\$ 1,32	\$ 2,28	\$ 1,92	\$ 1,44

(a) Calcule la media y la desviación típica de los precios

(i) en 1992;

(ii) en 2002. *[4 puntos]*

(b) (i) Dado que $s_{xy} = 0{,}3104$, calcule el coeficiente de correlación.

(ii) Comente la relación entre los precios. *[4 puntos]*

(c) Halle la ecuación de la recta de máximo ajuste en la forma $y = mx + c$. *[3 puntos]*

(d) ¿Cuánto piensa que deberá pagar actualmente por un artículo que costaba \$ 2,60 en 1992? *[1 punto]*

(e) ¿Qué artículo omitiría para aumentar el coeficiente de correlación? *[2 puntos]*

8. *[Puntuación máxima: 30]*

(i) Considere la función $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$.

(a) (i) Halle $f'(x)$.

(ii) Halle la pendiente de la curva $f(x)$ para $x = 3$. *[4 puntos]*

(b) Halle las abcisas x de los puntos de la curva en los cuales la pendiente es -12 . *[3 puntos]*

(c) (i) Calcule las abcisas x de los puntos donde existe un máximo y un mínimo local.

(ii) A partir de ellas halle las coordenadas del mínimo local. *[6 puntos]*

(d) ¿Para qué valores de x es $f(x)$ creciente? *[2 puntos]*

(ii) La distancia de s metros, recorrida por un atleta en t minutos, está dada por la fórmula

$$s(t) = 250t + 5t^2 - 0{,}06t^3 ,\ 0 \le t \le 70 .$$

(a) Calcule la distancia recorrida pasados 50 minutos. *[1 punto]*

(b) (i) Demuestre que 50 minutos y 1 segundo pueden ser escritos como $50\frac{1}{60}$ minutos.

(ii) Calcule la distancia recorrida pasados $50\frac{1}{60}$ minutos.

(iii) Calcule el valor de $\dfrac{s(50\frac{1}{60}) - s(50)}{\frac{1}{60}}$. *[5 puntos]*

(c) (i) Exprese la velocidad del atleta en función de t .

(ii) Calcule la velocidad cuando $t = 50$. *[3 puntos]*

(d) Explique por qué sus respuestas a las partes b(iii) y c(ii) tienen valores muy próximos. *[2 puntos]*

(iii) La función pendiente de una curva está dada por $g'(x) = x^2 - 2x + 5$.

La curva $g(x)$ pasa por el punto (3, 5) . Halle la ecuación de $g(x)$. *[4 puntos]*
