INTERNATIONAL BACCALAUREATE
BACCALAURÉAT INTERNATIONAL
BACHILLERATO INTERNACIONAL

ESTUDIOS MATEMÁTICOS
NIVEL MEDIO
PRUEBA 2

Viernes 3 de noviembre del 2000 (mañana)

2 horas

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste todas las cinco preguntas de la Sección A y una pregunta de la Sección B.
- A menos que se especifique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deben expresarse en forma exacta, o con tres cifras significativas, según sea más apropiado.

- Escriba la marca y el modelo de su calculadora en la portada de su cuadernillo de respuestas (p. ej., Casio *fx-7400G*, Sharp EL-9400, Texas Instruments TI-80).

Se aconseja que empiece una página nueva para cada respuesta. Una respuesta correcta **sin** *indicación del método utilizado no recibirá normalmente* **ningún** *punto. Se recomienda por lo tanto que muestre sus cálculos. (Cuando utilice gráficas de una calculadora de pantalla gráfica para hallar soluciones, deberá dibujar esas gráficas en su respuesta.)*

SECCIÓN A

Conteste las **cinco** *preguntas de esta sección.*

1. *[Puntuación máxima: 14]*

En un club de 60 miembros, todos asisten, bien los martes a representación teatral (D) bien los jueves a deportes (S) o bien ambos días a representación teatral y a deportes.

Una semana se observa que 48 miembros asisten a representación teatral y 44 miembros asisten a deportes y x miembros asisten a ambas cosas, representación teatral y deportes.

(a) (i) Dibuje un diagrama de Venn que ilustre esta información y ponga **todas las etiquetas**. *[3 puntos]*

(ii) Halle el número de miembros que asisten a ambas cosas, representación teatral y deportes. *[2 puntos]*

(iii) Describa con palabras el conjunto representado por $(D \cap S)'$. *[2 puntos]*

(iv) ¿Cuál es la probabilidad de que un miembro elegido al azar asista solamente a representación teatral o solamente a deportes? *[3 puntos]*

El club tiene 28 miembros femeninos, de los que 8 asisten a ambas cosas, representación teatral y deportes.

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que un miembro del club elegido al azar

(i) sea mujer y asista solamente a representación teatral o solamente a deportes? *[2 puntos]*

(ii) sea hombre y asista a ambas cosas, representación teatral y deportes? *[2 puntos]*

2. *[Puntuación máxima: 14]*

(i) Las proposiciones p , q y r se definen como sigue :

p : *éste es un buen curso*
q : *vale la pena hacer el curso*
r : *los profesores son benévolos al calificar*

(a) Escriba una afirmación simbólica para cada una de las siguientes frases

(i) *Si éste es un buen curso, entonces vale la pena hacerlo.*

(ii) *O los profesores son benévolos al calificar, o no vale la pena hacer el curso.* *[2 puntos]*

(b) Escriba el razonamiento siguiente usando p, q, r y símbolos o conectivas lógicas solamente.

Si éste es un buen curso, entonces vale la pena hacerlo. O los profesores son benévolos al calificar, o no vale la pena hacer el curso. Pero los profesores no son benévolos al calificar. Por tanto, éste no es un buen curso. *[2 puntos]*

(c) Use una tabla de verdad para comprobar la validez del razonamiento del apartado (b). *[6 puntos]*

(**Sugerencia:** comience su tabla así.)

p	q	r
V	V	V
V	V	F
V	F	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F
F	F	V
F	F	F

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 2: continuación)

(ii) La **Figura 1** muestra parte de la gráfica de $y = x^2$.

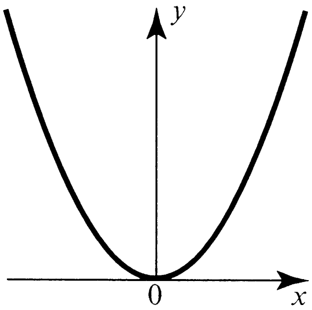


Figura 1

Las **Figuras 2, 3** y **4** muestran parte de la gráfica de $y = x^2$ una vez que se ha desplazado paralelamente al eje Ox , o paralelamente al eje Oy , o paralelamente a un eje y luego al otro.

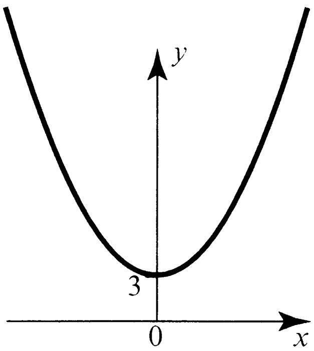


Figura 2

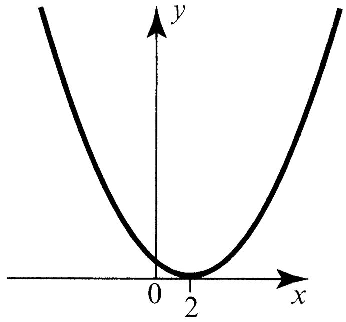


Figura 3

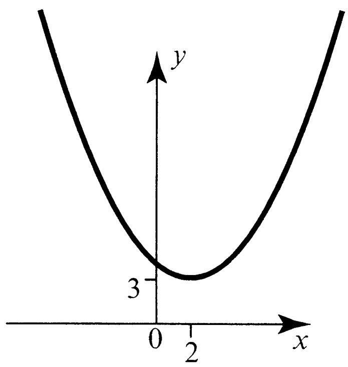


Figura 4

Escriba la ecuación de la gráfica que aparece en la

(a) **Figura 2** ;

(b) **Figura 3** ;

(c) **Figura 4** . *[4 puntos]*

3. *[Puntuación máxima: 14]*

(i) Dos jarras contienen cierto número de bolas de colores, tal como indican las figuras siguientes.

Se llevan a cabo dos experimentos.

Primer experimento: Se elige al azar una jarra y entonces se extrae una bola de la misma.

(a) Dibuje, **poniendo todas las etiquetas**, un diagrama de árbol que muestre **todos** los resultados posibles del experimento. *[2 puntos]*

(b) ¿Cuál es la probabilidad de extraer bola blanca? *[3 puntos]*

Segundo experimento: La bola extraída en el primer experimento no se devuelve a la jarra. Se extrae entonces una segunda bola de la misma jarra.

(c) ¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolas sean blancas? *[2 puntos]*

(ii) La siguiente tabla muestra los tiempos, aproximados al minuto, que han precisado 100 estudiantes para terminar una tarea de matemáticas.

Tiempo (t) minutos	11 – 15	16 – 20	21 – 25	26 – 30	31 – 35	36 – 40
Número de estudiantes	7	13	25	28	20	7

(a) Construya una tabla de frecuencias acumuladas. (Use como extremos superiores de clase 15,5, 20,5 etc.) *[2 puntos]*

(b) Dibuje, en papel cuadriculado, una gráfica de frecuencias acumuladas, usando una escala de 2 cm para representar 5 minutos en el eje horizontal y de 1 cm para representar 10 estudiantes en el eje vertical. *[3 puntos]*

(c) Use su gráfica para dar una estimación

(i) del número de estudiantes que terminaron la tarea en menos de 17,5 minutos ;

(ii) el tiempo necesario para que $\frac{3}{4}$ de los estudiantes termine su tarea. *[2 puntos]*

4. *[Puntuación máxima: 14]*

Benny tiene dos trabajos a tiempo parcial, segar céspedes y lavar automóviles. Trabaja un máximo de 15 horas semanales.

Tiene clientes fijos para los que trabaja al menos 6 horas por semana segando céspedes y al menos 3 horas por semana lavando automóviles.

Benny dedica x horas por semana a segar céspedes e y horas por semana a lavar automóviles.

(a) Escriba **tres** inecuaciones distintas que representen la información anterior sobre el tiempo que Benny dedica a trabajar. *[3 puntos]*

(b) (i) Dibuje, en papel cuadriculado, las gráficas de las inecuaciones halladas en el apartado (a). Use 1 cm para representar 2 horas en ambos ejes.

(ii) En su gráfica, sombree y etiquete la región R descrita por las **tres** inecuaciones. *[4 puntos]*

(c) ¿Puede Benny trabajar

(i) 10 horas por semana segando céspedes y 6 horas por semana lavando automóviles?

(ii) 3 horas por semana segando céspedes y 6 horas por semana lavando automóviles?

(iii) 8 horas por semana segando céspedes y 6 horas por semana lavando automóviles?

Dé **una** razón por cada una de sus respuestas. *[3 puntos]*

Benny recibe como salario 2,50 libras por hora por segar céspedes y 3,50 libras por hora por lavar automóviles.

(d) (i) Escriba una expresión, en función de x e y, que represente los ingresos semanales de Benny, I.

(ii) Use su gráfica para dar una estimación del máximo ingreso semanal de Benny por sus trabajos a tiempo parcial. Escriba el número de horas que debe trabajar para ganar este máximo. *[4 puntos]*

5. *[Puntuación máxima: 14]*

(i) Un jardinero coloca una cuerda de 19 metros de longitud para formar, mediante estacas, un parterre triangular con flores, tal como se muestra en la figura.

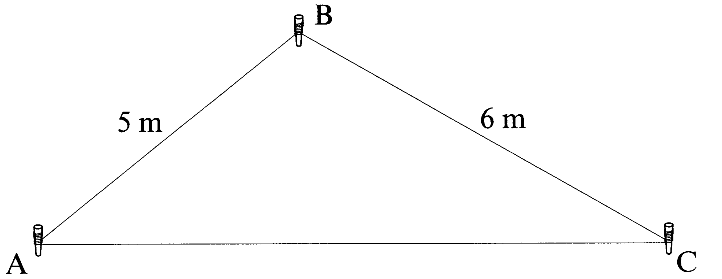


Figura no dibujada a escala

Calcule

(a) la medida del ángulo BAC ; *[3 puntos]*

(b) el área del parterre. *[2 puntos]*

(ii) Los vértices de la base cuadrada ABCD de una pirámide ABCDE tienen las coordenadas siguientes:

$$A(2\,,\,1\,,\,3),\ B(2\,,\,6\,,\,3),\ C(-3\,,\,k\,,\,3),\ D(-3\,,\,1\,,\,3).$$

(a) Calcule

(i) la longitud de [AB] ;

(ii) el valor de k ;

(iii) el área del triángulo ABC . *[4 puntos]*

(b) El volumen de la pirámide es de 40 unidades^3.

(i) Halle la altura de la pirámide.

(ii) Escriba las coordenadas de E . *[5 puntos]*

SECCIÓN B

Conteste **una** *pregunta de esta sección.*

Matrices y teoría de grafos

6. *[Puntuación máxima: 30]*

(i) (a) Diga si son VERDADERAS o FALSAS las siguientes afirmaciones

(i) La matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ es singular si $ad - bc = 0$.

(ii) La matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ es una matriz diagonal.

(iii) Si $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$, son matrices 2×2 cualesquiera, $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$.

(iv) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ es la transpuesta de $\boldsymbol{A} \Rightarrow (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}$. *[4 puntos]*

(b) Sea $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 2a & -\frac{1}{a} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 3 & x + 2y \\ 3x - y & xy \end{pmatrix}$,

$\boldsymbol{N} = \begin{pmatrix} 3 & 10 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$.

(i) Escriba la transpuesta de $\boldsymbol{A}$. *[1 punto]*

(ii) Halle $\det(\boldsymbol{A})$. *[1 punto]*

(iii) Halle una matriz $\boldsymbol{B}$ tal que $\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}$. *[3 puntos]*

(iv) Demuestre que $3\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = 2a \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -\frac{1}{a^2} \end{pmatrix}$. *[2 puntos]*

(v) Si $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{N}$, halle x e y. *[3 puntos]*

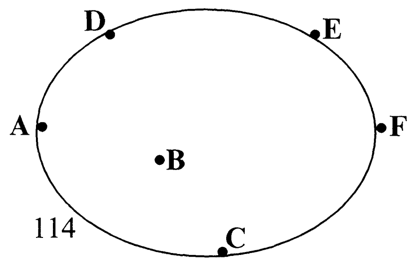
(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 6: continuación)

(ii) La tabla siguiente muestra las distancias en kilómetros a lo largo de las carreteras más importantes entre las ciudades A , B , C , D , E y F .

	A	B	C	D	E	F
A		70	114	89		
B	70		56	63	95	55
C	114	56		112	160	55
D	89	63	112		49	102
E		95	160	49		84
F		55	55	102	84	

(a) Copie, complete y **etiquete totalmente** el siguiente diagrama para mostrar su red asociada.



[3 puntos]

(b) El conductor de un furgón de la ciudad A debe entregar libros urgentemente en un colegio de la ciudad F .

(i) Halle el camino más corto para que el furgón pueda viajar entre A y F .

(ii) Escriba esta distancia más corta.

(iii) Antes de salir de A , se avisa al conductor de que hay una hora de demora en la carretera entre B y F . Suponiendo una velocidad media de 40 km h^{-1} , ¿ha de cambiar de ruta el conductor? Dé una razón de su respuesta. *[5 puntos]*

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 6: continuación)

(iii) En un juego de dos personas los jugadores Robert y Charles tienen cartas de diferentes colores, numeradas tal como se muestra en la figura.

NEGRO	ROJO
5	**5**

ROBERT

NEGRO	ROJO	ROJO
5	**3**	**1**

CHARLES

El juego que se disponen a jugar es el siguiente:

Al dar una señal los jugadores **simultáneamente** exponen una de sus cartas. Si las cartas **coinciden en el color**, Robert gana la diferencia entre los números de las cartas; si las cartas **no coinciden en el color**, Charles gana la diferencia entre los números de las cartas jugadas.

(a) Copie y complete la siguiente tabla mostrando los premios del juego, es decir, lo que gana cada uno.

CHARLES (C)

		NEGRO 5	ROJO 3	ROJO 1
ROBERT (R)	NEGRO 5		(R , C) (0 , 2)	
	ROJO 5			

[3 puntos]

(b) La mejor estrategia del jugador es la que usa para no perder.

(i) ¿Cuál es la mejor estrategia de Robert?

(ii) ¿Cuál es la mejor estrategia de Charles?

(iii) Si ambos jugadores usan su mejor estrategia, ¿quién gana y cuánto gana? *[3 puntos]*

(c) ¿Es el juego justo? Razone su respuesta. *[2 puntos]*

Extensión de estadística y probabilidad

7. *[Puntuación máxima: 30]*

(i) Una máquina cortadora produce varillas de acero que deben tener una longitud no superior a 6,54 cm . Las longitudes de las varillas se distribuyen normalmente con una media de μ cm y una desviación típica de σ cm.

(a) El lunes por la mañana, cuando la máquina está correctamente ajustada se desechan 1 de cada 20 varillas por sobrepasar los 6,54 cm. Se sabe que la longitud media es de 6,50 cm. Halle el valor de σ, la desviación típica, aproximando con tres cifras significativas. *[5 puntos]*

El jueves se halló que se rechazaba 1 de cada 15 varillas por sobrepasar los 6,54 cm.

(b) (i) Suponiendo que la media no ha cambiado halle la nueva desviación típica. *[4 puntos]*

(ii) Si el martes se producen en total 1000 varillas, ¿cuántas varillas puede esperarse que tengan longitudes entre 6,48 cm y 6,53 cm? *[4 puntos]*

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 7: continuación)

(ii) Los miembros de cierto club deben inscribirse en uno de estos tres juegos, billar, snooker o dardos.

En la siguiente tabla se representa el número de miembros de cada sexo que han escogido cada juego un año en particular.

	Billar	Snooker	Dardos
Hombre	39	16	8
Mujer	21	14	17

(a) Use una prueba de la χ^2 (ji-cuadrado) al nivel de significación del 5% para probar si la elección de juegos es independiente del sexo. Exprese con claridad las hipótesis nula y alternativa de la prueba, los valores esperados, y el número de grados de libertad usados. *[13 puntos]*

El año siguiente se amplió la selección de juegos y las cifras de este año son las siguientes:

	Billar	Snooker	Dardos	Esgrima
Hombre	4	15	8	10
Mujer	10	21	17	37

(b) Al aplicar la prueba de la χ^2 a este nuevo conjunto de datos,

(i) ¿por qué será necesario combinar billar con algún otro juego?

(ii) ¿qué otro juego combinaría Vd. con billar y por qué? *[2 puntos]*

Se debe elegir al azar un miembro del club.

(c) ¿Cuál es la probabilidad de que el miembro del club elegido sea

(i) una mujer que eligió billar o snooker?

(ii) un hombre o una mujer que eligió dardos o esgrima? *[2 puntos]*

Introducción al cálculo diferencial

8. *[Puntuación máxima: 30]*

(i) La función $f(x)$ viene dada por $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$, con $-1 \le x \le 3$.

(a) Derive $f(x)$ con respecto a x. *[2 puntos]*

(b) Copie y complete la siguiente tabla.

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$		0	1	2	9
$f'(x)$	12		0		12

[3 puntos]

(c) Use la información de su tabla para trazar una gráfica aproximada de $f(x)$. *[2 puntos]*

(d) Señale con una F, un punto de inflexión de su curva. *[1 punto]*

(e) Escriba la pendiente de la tangente a la curva en el punto (3 , 9). *[1 punto]*

(ii) El perímetro de un rectángulo tiene 24 metros.

(a) La tabla muestra algunas de las dimensiones posibles del rectángulo. Halle los valores de a , b , c , d y e .

Longitud (m)	Anchura (m)	Área (m^2)
1	11	11
a	10	b
3	c	27
4	d	e

[2 puntos]

(b) Si la longitud del rectángulo es de x m , y el área es A m^2 , exprese A en función de x solamente. *[1 punto]*

(c) ¿Qué longitud y anchura tiene el rectángulo si el área es un máximo? *[3 puntos]*

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 8: continuación)

(iii) Un objeto que se lanza hacia arriba llega a una altura de H metros pasados T segundos, cuando $H = 30T - 5T^2$.

Si T aumenta en una cantidad de t segundos, el aumento correspondiente a H es de h metros.

(a) Escriba una expresión para $(H + h)$ en función de T y t . *[2 puntos]*

(b) Halle

(i) una expresión de h en función de T y de t **solamente** ;

[4 puntos]

(ii) el límite de $\frac{h}{t}$ cuando $t \to 0$.

(c) (i) ¿Qué representa $\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}T}$?

(ii) ¿Cuál es el valor de $\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}T}$ cuando $T = 6$?

(iii) ¿Qué le dice el valor de $\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}T}$ obtenido en el apartado (ii) respecto de la dirección del moviemiento del objeto? *[3 puntos]*

(d) (i) ¿Después de cuántos segundos alcanza el objeto su altura máxima?

(ii) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza el objeto? *[4 puntos]*

(e) Calcule la velocidad inicial del objeto. *[2 puntos]*