INTERNATIONAL BACCALAUREATE
BACCALAURÉAT INTERNATIONAL
BACHILLERATO INTERNACIONAL

N00/520/S(2)S

MÉTODOS MATEMÁTICOS
NIVEL MEDIO
PRUEBA 2

Viernes 3 de noviembre del 2000 (mañana)

2 horas

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste todas las cinco preguntas de la Sección A y una pregunta de la Sección B.
- A menos que se especifique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deben expresarse en forma exacta, o con tres cifras significativas, según sea más apropiado.

- Escriba la marca y el modelo de su calculadora en la portada de su cuadernillo de respuestas (p. ej., Casio *fx-7400G*, Sharp EL-9400, Texas Instruments TI-80).

Se aconseja que empiece una página nueva para cada respuesta. Una respuesta correcta **sin** *indicación del método utilizado no recibirá normalmente* **ningún** *punto. Se recomienda por lo tanto que muestre sus cálculos. Cuando deba utilizar gráficas de una calculadora de pantalla gráfica para hallar soluciones, deberá dibujar esas gráficas en su respuesta.*

SECCIÓN A

Conteste las **cinco** *preguntas de esta sección.*

1. *[Puntuación máxima: 10]*

Se lleva a cabo un estudio para hallar los tiempos de espera de 100 clientes en un supermercado.

tiempo de espera (segundos)	número de clientes
0 – 30	5
30 – 60	15
60 – 90	33
90 – 120	21
120 – 150	11
150 – 180	7
180 – 210	5
210 – 240	3

(a) Calcule una estimación de la media de los tiempos de espera, usando una aproximación apropiada para representar cada intervalo. *[2 puntos]*

(b) Construya una tabla de frecuencias acumuladas para estos datos. *[1 punto]*

(c) Use la tabla de frecuencias acumuladas para dibujar una gráfica de frecuencias acumuladas, en papel milimetrado, usando una escala de 1 cm para cada 20 segundos de tiempo de espera en el eje horizontal y 1 cm para cada 10 clientes en el eje vertical. *[4 puntos]*

(d) Use la gráfica de frecuencias acumuladas para hallar estimaciones de la mediana y de los cuartiles inferior y superior. *[3 puntos]*

2. *[Puntuación máxima: 15]*

Un escalador resbala en la superficie de una roca y cae verticalmente. Al principio cae en caída libre pero pasados 2 segundos una cuerda de seguridad hace que la caída sea más lenta. La altura h metros del escalador pasados t segundos de la caída viene dada por:

$$h = 50 - 5t^2, \qquad 0 \le t \le 2$$
$$h = 90 - 40t + 5t^2, \quad 2 \le t \le 5$$

(a) Halle la altura del escalador cuando $t = 2$. *[1 punto]*

(b) Dibuje una gráfica aproximada de h en función de t para $0 \le t \le 5$. *[4 puntos]*

(c) Halle $\frac{dh}{dt}$ para:

(i) $0 \le t \le 2$

(ii) $2 \le t \le 5$ *[2 puntos]*

(d) Halle la velocidad del escalador cuando $t = 2$. *[2 puntos]*

(e) Halle los tiempos en los que la velocidad del escalador es cero. *[3 puntos]*

(f) Halle la altura mínima del escalador para $0 \le t \le 5$. *[3 puntos]*

3. *[Puntuación máxima: 15]*

Debe tener en cuenta que a lo largo de toda la pregunta se usan radianes.

(a) (i) Dibuje una gráfica aproximada de $y = x^2 \cos x$, para $0 \le x \le 2$, marcando con claridad las posiciones aproximadas de la intersección positiva con el eje Ox, el punto máximo y los extremos.

(ii) Escriba los coordenadas **aproximadas** de la intersección positiva con el eje Ox, el punto máximo y los extremos. *[7 puntos]*

(b) Halle el valor **exacto** de la abscisa positiva de la intersección con el eje Ox para $0 \le x \le 2$. *[2 puntos]*

Sea R la región del primer cuadrante encerrada por la gráfica y el eje Ox.

(c) (i) Sombree R en su diagrama.

(ii) Escriba una integral que represente el área de R. *[3 puntos]*

(d) Calcule la integral del apartado (c)(ii), bien usando una calculadora de pantalla gráfica, o usando la información siguiente.

$$\frac{d}{dx}(x^2 \operatorname{sen} x + 2x \cos x - 2 \operatorname{sen} x) = x^2 \cos x.$$ *[3 puntos]*

4. *[Puntuación máxima: 20]*

En esta pregunta el vector $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ km representa un desplazamiento hacia el este,

y el vector $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ km representa un desplazamiento hacia el norte.

El punto (0 , 0) es la posición del *Shipple Airport*. El vector de posición $\boldsymbol{r}_1$ de un avión *Air One* viene dado por

$$\boldsymbol{r}_1 = \begin{pmatrix}16\\12\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}12\\-5\end{pmatrix},$$

en donde t es el tiempo en minutos **desde** las 12:00 .

(a) Demuestre que el avión *Air One*

(i) está a 20 km del *Shipple Airport* a las 12:00 ;

(ii) tiene una velocidad de 13 km/min. *[4 puntos]*

(b) Demuestre que una ecuación cartesiana de la trayectoria de *Air One* es:

$$5x + 12y = 224 .$$ *[3 puntos]*

El vector de posición $\boldsymbol{r}_2$ de un avión *Air Two* viene dado por

$$\boldsymbol{r}_2 = \begin{pmatrix}23\\-5\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2,5\\6\end{pmatrix},$$

en donde t es el tiempo en minutos **desde** las 12:00 .

(c) Halle el ángulo de las trayectorias de los dos aviones. *[4 puntos]*

(d) (i) Halle una ecuación cartesiana de la trayectoria de *Air Two*.

(ii) Partiendo de aquí halle las coordenadas del punto en el que las dos trayectorias se cortan. *[5 puntos]*

(e) Supuesto que los dos aviones vuelan a la misma altura, demuestre que no chocan. *[4 puntos]*

5. *[Puntuación máxima: 10]*

Inicialmente un tanque contiene 10 000 litros de un líquido. En el tiempo $t = 0$ minutos se abre un grifo y el líquido fluye fuera del tanque. El volumen del líquido, V litros, que permanece en el tanque pasados t minutos viene dado por

$$V = 10\,000\ (0{,}933^t)\ .$$

(a) Halle el valor de V pasados 5 minutos. *[1 punto]*

(b) Halle el tiempo que se necesita, aproximando al segundo, para que la mitad del líquido inicial fluya fuera del tanque. *[3 puntos]*

(c) Se considera que el tanque está efectivamente vacío cuando ha salido del mismo el 95% del líquido. Demuestre que se necesitan casi tres cuartos de hora para que esto suceda. *[3 puntos]*

(d) (i) Halle el valor de $10\,000 - V$ cuando $t = 0{,}001$ minutos.

(ii) Partiendo de aquí, o de otro modo, estime el volumen de líquido por minuto que fluye inicialmente fuera del tanque, dando su respuesta con dos cifras significativas. *[3 puntos]*

SECCIÓN B

*Conteste **una** pregunta de esta sección.*

Métodos estadísticos

6. *[Puntuación máxima: 30]*

(i) Una autovía urbana tiene un límite de velocidad de 50 km h^{-1} . Se sabe que las velocidades de los vehículos que viajan por la autovía se distribuyen normalmente, con una desviación típica de 10 km h^{-1}, y que el 30% de los vehículos que usan la autovía sobrepasan el límite de velocidad.

(a) Demuestre que la velocidad media de los vehículos es de aproximadamente 44,8 km h^{-1}. *[3 puntos]*

La policía dirige una campaña de "conducción más segura" dirigida a conseguir una conducción más lenta, y quiere saber si la campaña ha surgido efecto. Se halla que una muestra de 25 vehículos tiene una velocidad media de 41,3 km h^{-1}.

(b) Supuesto que la hipótesis nula es

H_0 : la velocidad media no ha sido afectada por la campaña

enuncie H_1 , la hipótesis alternativa. *[1 punto]*

(c) Diga si es más apropiada una prueba con una cola o con dos colas y diga por qué. *[2 puntos]*

(d) ¿Ha tenido la campaña un efecto significativo al nivel 5%? *[4 puntos]*

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 6: continuación)

(ii) Un grupo de 100 personas tiene cierto virus que puede provocar una enfermedad mortal. De estas 100 personas, 50 reciben tratamiento mediante un nuevo medicamento. De las personas que no reciben tratamiento 31 desarrollan la enfermedad, pero de las personas tratadas solamente 20 desarrollan la enfermedad. Los resultados de este tratamiento se resumen en la siguiente tabla:

	Desarrollan la enfermedad	No desarrollan la enfermedad
No tratadas	31	19
Tratadas	20	30

(a) Suponiendo que el nuevo medicamento no surge efecto construya una tabla de las frecuencias esperadas para este grupo. *[2 puntos]*

(b) Aplique la corrección de continuidad de Yates a los datos originales. Presente su respuesta en forma de tabla. *[2 puntos]*

(c) Calcule χ^2_{calc} para estos datos. *[3 puntos]*

(d) ¿Indican estos datos que la administración del medicamento afecta significativamente, al nivel del 5%, el desarrollo de la enfermedad? *[3 puntos]*

(iii) Sophie guarda constancia de sus notas correspondientes a las tareas semanales en Métodos Matemáticos.

tiempo en semanas, (x)	1	2	3	4
porcentaje de nota obtenida, (y)	55	57	56	59

(a) Escriba los valores de la media y de la desviación típica de x y de y . *[2 puntos]*

(b) Demuestre que la media de xy es 143,25 . *[2 puntos]*

(c) Demuestre que el coeficiente de correlación producto-momento es 0,83 (aproximado con dos cifras decimales). *[2 puntos]*

(d) Use el método de los mínimos cuadrados para hallar la recta de regresión $y = a + bx$ de y sobre x que mejor se ajusta a estas observaciones. *[4 puntos]*

Extensión de análisis

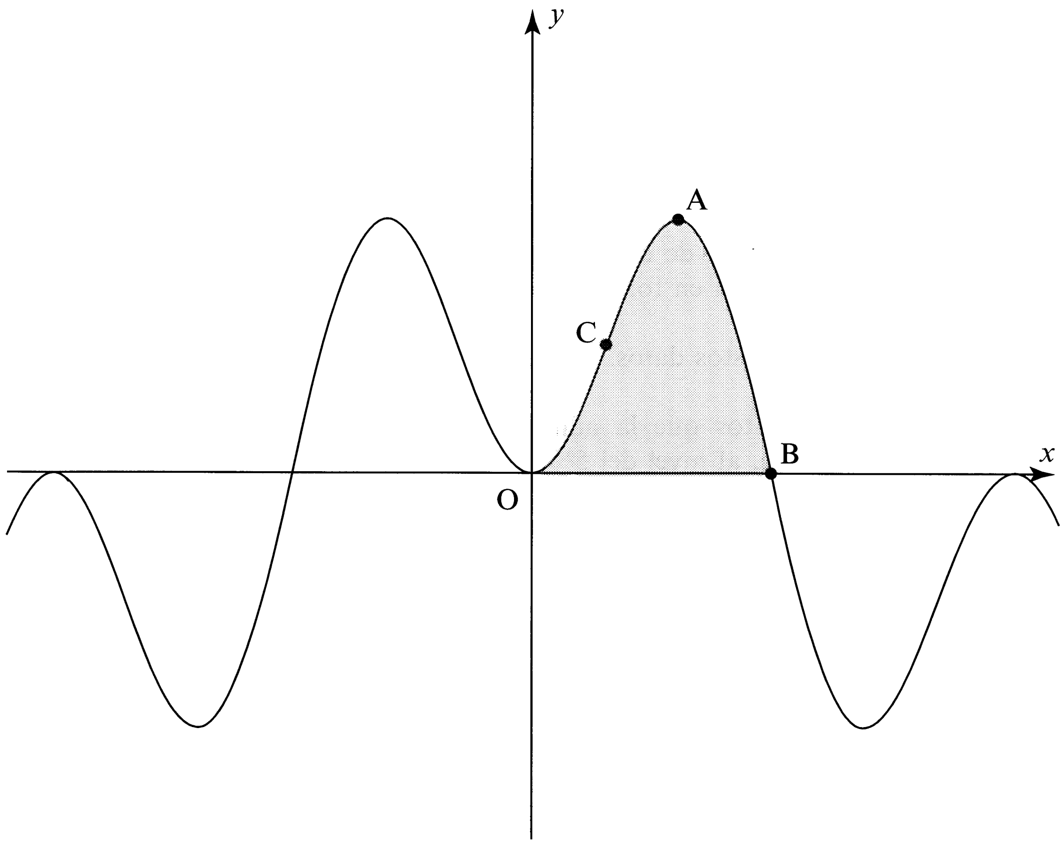
7. *[Puntuación máxima: 30]*

(i) **En todo este apartado de la pregunta se usan radianes.**

La función f viene dada por

$$f(x) = (\text{sen}\ x)^2 \cos x\ .$$

La siguiente figura muestra parte de la gráfica de $y = f(x)$.



El punto A es un punto máximo, el punto B está en el eje Ox, y el punto C es un punto de inflexión.

(a) Diga cuál es el período de f . *[1 punto]*

(b) Fijándose en la gráfica de $y = f(x)$, halle con **la precisión de una cifra significativa** el recorrido de f . *[1 punto]*

(c) (i) Halle $f'(x)$.

(ii) Partiendo de aquí demuestre que en el punto A , $\cos x = \sqrt{\frac{1}{3}}$.

(iii) Halle el valor máximo exacto. *[9 puntos]*

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 7: continuación)

(d) Halle el valor exacto de la abscisa del punto B . *[1 punto]*

(e) (i) Halle $\int f(x)\, \mathrm{d}x$.

(ii) Halle el área de la región sombreada en la figura. *[4 puntos]*

(f) Dado que $f''(x) = 9(\cos x)^3 - 7 \cos x$, halle la abscisa del punto C . *[4 puntos]*

(ii) La ecuación $\mathrm{e}^{-x} = x^2$ tiene una solución positiva.

(a) Demuestre que esta solución se encuentra entre $x = 0{,}5$ y $x = 1$. *[2 puntos]*

Esta solución debe hallarse usando iteración de punto fijo. Para hacerlo la ecuación se escribe en la forma $x = g(x)$, siendo $g(x) = \sqrt{\mathrm{e}^{-x}}$.

(b) (i) Use la fórmula iterativa

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

con $x_0 = 0{,}7$, para obtener las primeras cuatro cifras decimales de x_1 , x_2 , y x_3 .

(ii) Halle la solución que está entre 0,5 y 1 con una precisión de seis cifras significativas. *[4 puntos]*

Hay otra manera de ordenar esta ecuación en la forma $x = g^{-1}(x)$.

(c) (i) Halle esta manera y escriba la fórmula iterativa correspondiente.

(ii) Use esta fórmula iterativa con $x_0 = 0{,}7$ para obtener las primeras cuatro cifras decimales de x_1 , x_2 y x_3 .

(iii) Comente el comportamiento de este proceso iterativo. *[4 puntos]*

Extensión de geometría

8. *[Puntuación máxima: 30]*

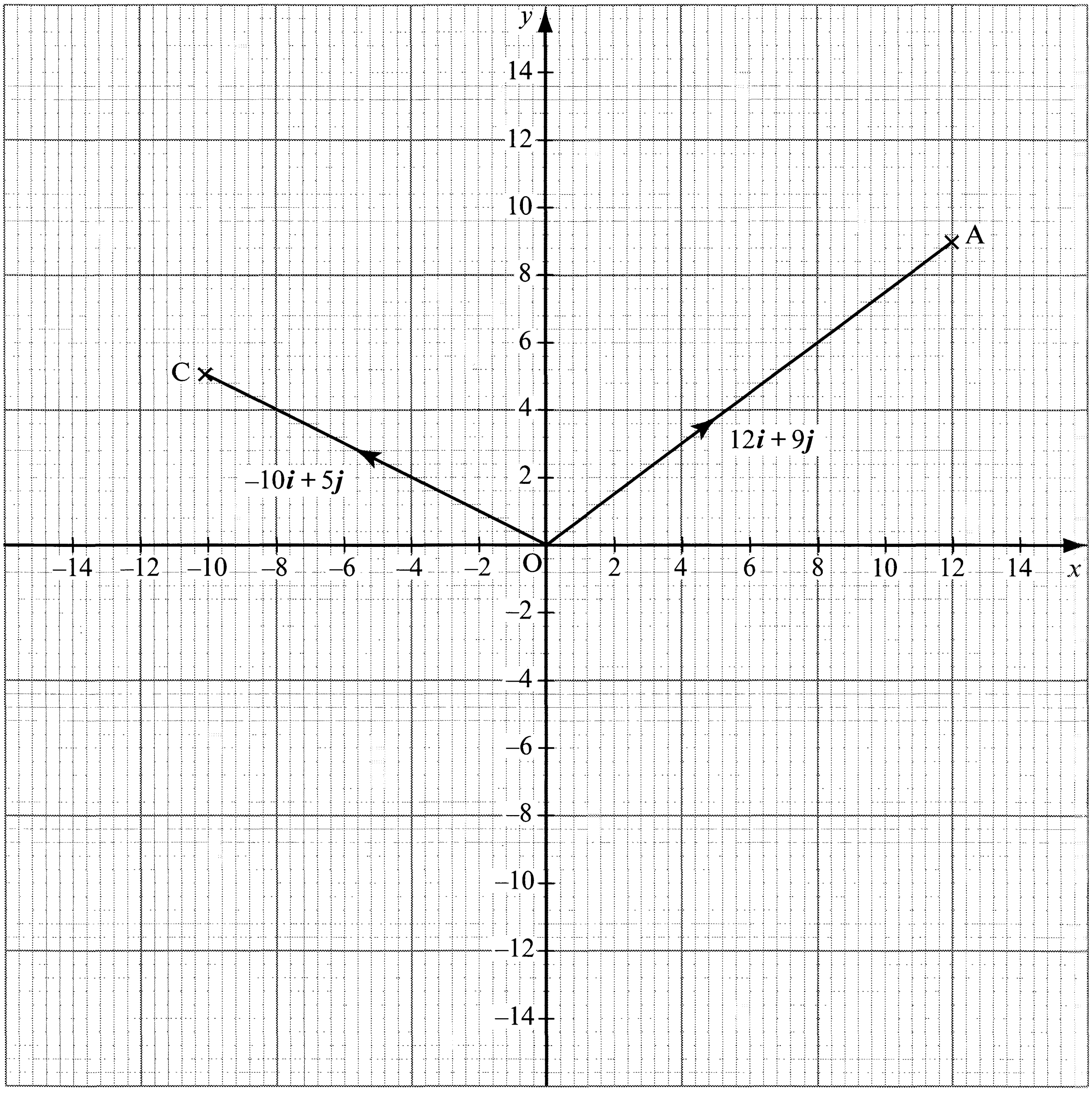
(i) La transformación $\boldsymbol{P}$ es una simetría axial respecto de la recta $x + y = 0$, y la transformación $\boldsymbol{Q}$ es una rotación de $+90°$ alrededor del origen $(0, 0)$.

(a) Describa completamente la transformación única equivalente a $\boldsymbol{PQ}$. *[2 puntos]*

(b) La transformación $\boldsymbol{X}$ satisface $\boldsymbol{XQ} = \boldsymbol{P}$. Describa completamente $\boldsymbol{X}$. *[3 puntos]*

(ii) La figura muestra el punto A que tiene el vector de posición $\overrightarrow{OA} = 12\boldsymbol{i} + 9\boldsymbol{j}$,

y el punto C que tiene el vector de posición $\overrightarrow{OC} = -10\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j}$.



(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 8: continuación)

(a) Supuesto que el cuadrilátero OABC es un paralelogramo, use la figura para hallar el vector de posición de B. *[1 punto]*

Una cizalladura de matriz $\boldsymbol{M}$ tiene como invariante la recta de ecuación $4y - 3x = 0$. Bajo esta transformación la imagen de C es C′, que tiene por coordenadas (–6, 8).

(b) (i) Explique por qué A es un punto invariante en esta transformación.

(ii) Demuestre que [CC′] es paralela a la recta invariante. *[3 puntos]*

(c) (i) Use los resultados del apartado (b) para obtener la ecuación

$$\boldsymbol{M}\begin{pmatrix} 12 & -10 \\ 9 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -6 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}.$$

(ii) Partiendo de aquí, halle $\boldsymbol{M}$.

(iii) Demuestre que det $\boldsymbol{M}$ es 1, y dé de esto una explicación geométrica. *[8 puntos]*

(d) Supuesto que [OC′] es perpendicular a [OA], halle el área del paralelogramo OABC. *[3 puntos]*

(iii) Las transformaciones $\boldsymbol{R}$ y $\boldsymbol{S}$ se definen como sigue

$\boldsymbol{R}$: simetría axial respecto al eje de ecuación $x + y = 6$
$\boldsymbol{S}$: simetría axial respecto al eje de ecuación $y = 1$.

(a) Demuestre que $\boldsymbol{S} : (x, y) \mapsto (x, 2 - y)$. *[4 puntos]*

(b) Supuesto que $\boldsymbol{R} : (x, y) \mapsto (6 - y, 6 - x)$, demuestre que

$$\boldsymbol{SR} : (x, y) \mapsto (6 - y, x - 4).$$ *[2 puntos]*

(c) El punto invariante de la transformación $\boldsymbol{SR}$ tiene por coordenadas (x_0, y_0). Usando el hecho de que $\boldsymbol{SR} : (x_0, y_0) \mapsto (x_0, y_0)$, halle los valores de x_0 e y_0. *[2 puntos]*

(d) Partiendo de aquí describa completamente $\boldsymbol{SR}$ como una rotación única. *[2 puntos]*