Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Matemáticas
Nivel superior
Prueba 3 – Conjuntos, relaciones y grupos

Lunes 8 de mayo de 2017 (tarde)

1 hora

Instrucciones para los alumnos

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste todas las preguntas.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de matemáticas NS y de ampliación de matemáticas NS** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[50 puntos]**.

2217 – 7229

Por favor comience cada pregunta en una página nueva. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. En particular, junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza un gráfico para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente la misma como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. [Puntuación máxima: 10]

El conjunto A contiene todos los números enteros positivos menores que 20 que son congruentes con 3 módulo 4.
El conjunto B contiene todos los números primos menores que 20.

(a) (i) Escriba todos los elementos de A y todos los elementos de B.

(ii) Determine la diferencia simétrica, $A \Delta B$, de los conjuntos A y B. [4]

(b) El conjunto C se define como $C = \{7, 9, 13, 19\}$.

(i) Escriba todos los elementos de $A \cap B$, $A \cap C$ y $B \cup C$.

(ii) A partir de lo anterior, y considerando $A \cap (B \cup C)$, verifique que en este caso la operación $\cap$ es distributiva respecto a la operación $\cup$. [6]

2. [Puntuación máxima: 11]

La relación R se define tal que aRb si y solo si $4^a - 4^b$ es divisible entre 7, donde $a, b \in \mathbb{Z}^+$.

(a) (i) Muestre que R es una relación de equivalencia.

(ii) Determine las clases de equivalencia de R. [9]

La relación de equivalencia S se define tal que cSd si y solo si $4^c - 4^d$ es divisible entre 6, donde $c, d \in \mathbb{Z}^+$.

(b) Determine el número de clases de equivalencia de S. [2]

3. [Puntuación máxima: 13]

La función $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ viene dada por $f(x, y) = \left(2x^3 + y^3, x^3 + 2y^3\right)$.

(a) Muestre que f es biyectiva. [12]

(b) A partir de lo anterior, escriba la función inversa $f^{-1}(x, y)$. [1]

4. [Puntuación máxima: 16]

La operación binaria $*$ se define mediante

$$a * b = a + b - 3 \text{ para } a, b \in \mathbb{Z}.$$

(a) Muestre que $\{\mathbb{Z}, *\}$ es un grupo abeliano. [9]

(b) Muestre que no hay ningún elemento de orden 2. [2]

(c) Halle un subgrupo propio de $\{\mathbb{Z}, *\}$. [2]

La operación binaria $\circ$ se define mediante

$$a \circ b = a + b + 3 \text{ para } a, b \in \mathbb{Z}.$$

Considere el grupo $\{\mathbb{Z}, \circ\}$ y la función biyectiva $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ que viene dada por $f(a) = a - 6$.

(d) Muestre que los grupos $\{\mathbb{Z}, *\}$ y $\{\mathbb{Z}, \circ\}$ son isomorfos. [3]