Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Matemáticas
Nivel superior
Prueba 2

Viernes 5 de mayo de 2017 (mañana)

Número de convocatoria del alumno

2 horas

Instrucciones para los alumnos

- Escriba su número de convocatoria en las casillas de arriba.
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Sección A: conteste todas las preguntas. Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto.
- Sección B: conteste todas las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Escriba su número de convocatoria en la parte delantera del cuadernillo de respuestas, y adjúntelo a este cuestionario de examen y a su portada utilizando los cordeles provistos.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de matemáticas NS y de ampliación de matemáticas NS** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[100 puntos]**.

2217 – 7226

© International Baccalaureate Organization 2017

International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. En particular, junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza un gráfico para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente la misma como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

Sección A

Conteste **todas** las preguntas. Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto. De ser necesario, se puede continuar desarrollando la respuesta en el espacio que queda debajo de las líneas.

1. [Puntuación máxima: 4]

En un club de golf hay 75 jugadores que participan en un torneo de golf. En la siguiente tabla se muestran las puntuaciones que han obtenido en el $18.^{\text{o}}$ hoyo.

Puntuación	2	3	4	5	6	7
Frecuencia	3	15	28	17	9	3

(a) Se elige al azar a uno de los jugadores. Halle la probabilidad de que la puntuación de este jugador fuera de 5 o más. [2]

(b) Calcule la media de las puntuaciones. [2]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

2. [Puntuación máxima: 9]

Considere la curva definida por la ecuación $4x^2 + y^2 = 7$.

(a) Halle la ecuación de la normal a la curva en el punto $\left(1,\ \sqrt{3}\right)$. [6]

(b) Halle el volumen del sólido que se forma cuando la región delimitada por la curva, el eje x para $x \geq 0$ y el eje y para $y \geq 0$ se rota 2π alrededor del eje x. [3]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

3. [Puntuación máxima: 7]

Una máquina elabora paquetes de galletas. Los pesos X, en gramos, de los paquetes de galletas se pueden modelizar por una distribución normal, donde $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$. Un paquete de galletas se considera que tiene un peso insuficiente si pesa menos de 250 gramos.

(a) Sabiendo que $\mu = 253$ y $\sigma = 1{,}5$, halle la probabilidad de que un paquete de galletas elegido al azar tenga un peso insuficiente. [2]

El fabricante decide que la probabilidad de que un paquete tenga un peso insuficiente debería ser igual a $0{,}002$. Para conseguirlo se aumenta μ mientras que σ no cambia.

(b) Calcule el nuevo valor de μ, con una aproximación de dos lugares decimales. [3]

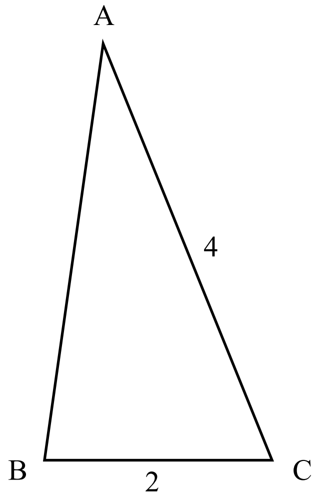
El fabricante está contento con la decisión de que la probabilidad de que un paquete tenga un peso insuficiente sea igual a $0{,}002$, pero está descontento con la manera en la que se ha logrado. Por ello, se ajusta la máquina para reducir σ y hacer que μ vuelva a ser igual a 253.

(c) Calcule el nuevo valor de σ. [2]

4. [Puntuación máxima: 6]

(a) Halle el conjunto de valores de k que satisfacen la inecuación $k^2 - k - 12 < 0$. [2]

(b) El triángulo ABC se muestra en la siguiente figura. Sabiendo que $\cos B < \frac{1}{4}$, halle el rango de posibles valores de AB. [4]



5. [Puntuación máxima: 9]

A John, en julio, le gusta salir a navegar todos los días. Para ayudarle a decidir si es seguro o no salir a navegar, cada día de julio lo califica como ventoso o como tranquilo. Si un día dado del mes de julio es tranquilo, la probabilidad de que el día siguiente sea tranquilo es igual a $0{,}9$. Si un día dado del mes de julio es ventoso, la probabilidad de que el día siguiente sea tranquilo es igual a $0{,}3$. El pronóstico del tiempo para el 1 de julio predice que la probabilidad de que sea un día tranquilo es igual a $0{,}8$.

(a) Dibuje un diagrama de árbol que represente esta información para los tres primeros días de julio. [3]

(b) Halle la probabilidad de que el 3 de julio sea un día tranquilo. [2]

(c) Halle la probabilidad de que el 1 de julio fuera un día tranquilo, sabiendo que el 3 de julio es un día ventoso. [4]

6. [Puntuación máxima: 5]

Sabiendo que $\log_{10}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}(p+2q)\right)=\frac{1}{2}\left(\log_{10} p+\log_{10} q\right)$, $p>0$, $q>0$, halle p en función de q.

7. [Puntuación máxima: 4]

Sabiendo que $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} \neq \boldsymbol{0}$, demuestre que $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c} = s\boldsymbol{b}$, donde s es un escalar.

8. [Puntuación máxima: 6]

En una convocatoria de exámenes de prueba, un alumno de un colegio tiene que hacer 18 exámenes, incluidos el de Física, el de Química y el de Biología. No le está permitido hacer consecutivamente dos de estos tres exámenes. No existe ninguna otra limitación relativa al orden en el que puede hacer el resto de exámenes.

Halle el número de órdenes distintos en los que se pueden hacer estos 18 exámenes.

No escriba soluciones en esta página.

Sección B

Conteste **todas** las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Empiece una página nueva para cada respuesta.

9. [Puntuación máxima: 22]

Los puntos A, B y C tienen los siguientes vectores de posición con respecto al origen O.

$$\vec{\mathrm{OA}} = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$$

$$\vec{\mathrm{OB}} = 2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$$

$$\vec{\mathrm{OC}} = \boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$$

(a) Halle la ecuación vectorial de la recta (BC). [3]

(b) Determine si las rectas (OA) y (BC) se cortan o no. [6]

(c) Halle la ecuación cartesiana del plano Π_1, que pasa por C y es perpendicular a $\vec{\mathrm{OA}}$. [3]

(d) Muestre que la recta (BC) pertenece al plano Π_1. [2]

El plano Π_2 contiene los puntos O, A y B, y el plano Π_3 contiene los puntos O, A y C.

(e) Verifique que $2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ es perpendicular al plano Π_2. [3]

(f) Halle un vector que sea perpendicular al plano Π_3. [1]

(g) Halle el ángulo agudo entre los planos Π_2 y Π_3. [4]

No escriba soluciones en esta página.

10. [Puntuación máxima: 15]

Una variable aleatoria continua X tiene la función densidad de probabilidad f

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{a} + b, & 0 \le x \le 4 \\ 0 & \text{resto de valores} \end{cases}$$ donde a y b son constantes positivas.

Se sabe que $\mathrm{P}(X \ge 2) = 0{,}75$.

(a) Muestre que $a = 32$ y $b = \dfrac{1}{12}$. [5]

(b) Halle $\mathrm{E}(X)$. [2]

(c) Halle $\mathrm{Var}(X)$. [2]

(d) Halle la mediana de X. [3]

Se realizan ocho observaciones independientes de X y la variable aleatoria Y es el número de observaciones tales que $X \ge 2$.

(e) Halle $\mathrm{E}(Y)$. [2]

(f) Halle $\mathrm{P}(Y \ge 3)$. [1]

No escriba soluciones en esta página.

11. [Puntuación máxima: 13]

Sea $f(x) = 3x^4 + ax^3 + bx^2 - 7x - 4$, donde a y b son números enteros positivos.

(a) Sabiendo que $x^2 - 1$ es un factor de $f(x)$, halle el valor de a y el valor de b. [4]

(b) Factorice $f(x)$, expresándolo como un producto de factores lineales. [3]

(c) Dibuje aproximadamente el gráfico de $y = f(x)$, y rotule todos los puntos máximos, los puntos mínimos y los puntos de corte con los ejes x e y. [3]

(d) Utilizando este gráfico, indique el rango de valores de c para los cuales $f(x) = c$ tiene exactamente dos raíces reales distintas. [3]

No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.

No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.

No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.