Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Mathématiques
Niveau supérieur
Épreuve 3 – statistiques et probabilités

Mercredi 18 mai 2016 (matin)

1 heure

Instructions destinées aux candidats

- N'ouvrez pas cette épreuve avant d'y être autorisé(e).
- Répondez à toutes les questions.
- Sauf indication contraire dans l'intitulé de la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.
- Une calculatrice à écran graphique est nécessaire pour cette épreuve.
- Un exemplaire non annoté du **livret de formules pour les cours de mathématiques NS et de mathématiques complémentaires NS** est nécessaire pour cette épreuve.
- Le nombre maximum de points pour cette épreuve d'examen est de **[60 points]**.

2216 – 7224

Veuillez répondre à chaque question sur une nouvelle page. Le total des points ne sera pas nécessairement attribué pour une réponse correcte si le raisonnement n'a pas été indiqué. Les réponses doivent être appuyées par un raisonnement et/ou des explications. En particulier, les solutions obtenues à l'aide d'une calculatrice à écran graphique doivent être accompagnées d'un raisonnement adéquat. Par exemple, si des représentations graphiques sont utilisées pour trouver la solution, veuillez inclure une esquisse de ces représentations graphiques dans votre réponse. Lorsque la réponse est fausse, certains points peuvent être attribués si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. On vous recommande donc de montrer tout votre raisonnement.

1. [Note maximale : 12]

Adam complète chaque jour la grille de mots croisés du journal local. Le temps consacré par Adam, X minutes, pour compléter la grille est modélisé par la distribution normale $\mathrm{N}(22, 5^2)$.

(a) Étant donné que, lors d'une journée choisie au hasard, la probabilité qu'il complète la grille en moins de a minutes est égale à $0{,}8$, trouvez la valeur de a. [3]

(b) Trouvez la probabilité que le temps total consacré par Adam pour compléter cinq grilles choisies au hasard soit supérieur à 120 minutes. [3]

Béatrice complète également chaque jour la grille de mots croisés du journal local. Le temps consacré par Béatrice, Y minutes, pour compléter la grille est modélisé par la distribution normale $\mathrm{N}(40, 6^2)$.

(c) Trouvez la probabilité que, lors d'une journée choisie au hasard, le temps consacré par Béatrice pour compléter la grille soit plus que le double du temps consacré par Adam pour compléter la grille. Supposez que ces deux temps sont indépendants. [6]

2. [Note maximale : 10]

Les variables aléatoires X et Y suivent une distribution normale bivariée dont le coefficient de corrélation est ρ.

(a) Indiquez des hypothèses appropriées pour rechercher si X et Y sont indépendantes ou si elles ne le sont pas. [2]

Un échantillon aléatoire de 10 observations de X et Y a été obtenu et la valeur calculée de r, le coefficient de corrélation de l'échantillon, était de $0{,}486$.

(b) (i) Déterminez la valeur p.

(ii) Indiquez votre conclusion au niveau de signification de 5%. [7]

(c) Expliquez pourquoi l'équation de la droite de régression de y en fonction de x ne devrait pas être utilisée pour prédire la valeur de y correspondant à $x = x_0$, où x_0 se situe à l'intérieur de l'intervalle contenant l'ensemble des valeurs de x dans l'échantillon. [1]

3. [Note maximale : 15]

La variable aléatoire continue X prend des valeurs dans l'intervalle $[0, \theta]$ et

$$\mathrm{E}(X) = \frac{\theta}{2} \text{ et } \mathrm{Var}(X) = \frac{\theta^2}{24}.$$

Afin d'estimer le paramètre inconnu θ, un échantillon aléatoire de taille n est obtenu à partir de la distribution de X. La moyenne de l'échantillon est notée $\bar{X}$ et $U = k\bar{X}$ est un estimateur sans biais de θ.

(a) Trouvez la valeur de k. [3]

(b) (i) Calculez une estimation sans biais de θ, en utilisant l'échantillon aléatoire, $8{,}3\ ;\ 4{,}2\ ;\ 6{,}5\ ;\ 10{,}3\ ;\ 2{,}7\ ;\ 1{,}2\ ;\ 3{,}3\ ;\ 4{,}3$.

(ii) Expliquez brièvement pourquoi ce n'est pas une bonne estimation de θ. [4]

(c) (i) Montrez que $\mathrm{Var}(U) = \frac{\theta^2}{6n}$.

(ii) Montrez que U^2 n'est pas un estimateur sans biais de θ^2.

(iii) Trouvez un estimateur sans biais de θ^2 en fonction de U et de n. [8]

4. [Note maximale : 11]

Le propriétaire d'une usine doit fabriquer des briques dont le poids est de $2{,}2\,\mathrm{kg}$.
Le responsable du contrôle de la qualité désire tester si oui ou non, lors d'une journée donnée, le poids moyen des briques fabriquées est bien de $2{,}2\,\mathrm{kg}$.

(a) Indiquez les hypothèses qui permettront au responsable du contrôle de la qualité de tester le poids moyen en utilisant un test bilatéral. [2]

Il sélectionne donc un échantillon aléatoire de 20 de ces briques et détermine le poids, $x\,\mathrm{kg}$, de chaque brique. Il produit les statistiques sommaires suivantes.

$$\sum x = 42{,}0;\ \sum x^2 = 89{,}2$$

(b) (i) Calculez des estimations sans biais de la moyenne et de la variance des poids des briques fabriquées.

(ii) En supposant que les poids des briques sont normalement distribués, déterminez la valeur p correspondant aux résultats ci-dessus et indiquez la conclusion dans le contexte, en utilisant un niveau de signification de $5\,\%$. [7]

(c) Le propriétaire est davantage familier avec l'utilisation d'intervalles de confiance. Déterminez un intervalle de confiance à $95\,\%$ pour le poids moyen des briques fabriquées lors d'une journée donnée. [2]

5. [Note maximale : 12]

La variable aléatoire continue X a pour fonction de densité

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}.$$

La variable aléatoire discrète Y est définie comme la partie entière de X, c'est-à-dire le plus grand entier plus petit ou égal à X.

(a) Montrez que la distribution de probabilité de Y est donnée par $P(Y = y) = e^{-y}\left(1 - e^{-1}\right)$, $y \in \mathbb{N}$. [4]

(b) (i) Montrez que $G(t)$, la fonction génératrice de Y est donnée par $G(t) = \dfrac{1 - e^{-1}}{1 - e^{-1}t}$.

(ii) À partir de là, déterminez la valeur de $E(Y)$ correcte à trois chiffres significatifs près. [8]