Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Mathématiques
Niveau supérieur
Épreuve 3 – ensembles, relations et groupes

Mercredi 18 mai 2016 (matin)

1 heure

Instructions destinées aux candidats

- N’ouvrez pas cette épreuve avant d’y être autorisé(e).
- Répondez à toutes les questions.
- Sauf indication contraire dans l’intitulé de la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.
- Une calculatrice à écran graphique est nécessaire pour cette épreuve.
- Un exemplaire non annoté du **livret de formules pour les cours de mathématiques NS et de mathématiques complémentaires NS** est nécessaire pour cette épreuve.
- Le nombre maximum de points pour cette épreuve d’examen est de **[60 points]**.

2216 – 7223

Veuillez répondre à chaque question sur une nouvelle page. Le total des points ne sera pas nécessairement attribué pour une réponse correcte si le raisonnement n'a pas été indiqué. Les réponses doivent être appuyées par un raisonnement et/ou des explications. En particulier, les solutions obtenues à l'aide d'une calculatrice à écran graphique doivent être accompagnées d'un raisonnement adéquat. Par exemple, si des représentations graphiques sont utilisées pour trouver la solution, veuillez inclure une esquisse de ces représentations graphiques dans votre réponse. Lorsque la réponse est fausse, certains points peuvent être attribués si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. On vous recommande donc de montrer tout votre raisonnement.

1. [Note maximale : 19]

La table de Cayley suivante pour l'opération binaire multiplication modulo 9, notée par $*$, est définie sur l'ensemble $S = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$.

$*$	1	2	4	5	7	8
1	1	2	4	5	7	8
2	2	4	8	1	5	7
4	4	8				
5	5	1				
7	7	5				
8	8	7				

(a) Recopiez et complétez la table. [3]

(b) Montrez que $\{S, *\}$ est un groupe abélien. [5]

(c) Déterminez les ordres de tous les éléments de $\{S, *\}$. [3]

(d) (i) Trouvez les deux sous-groupes propres de $\{S, *\}$.

(ii) Trouvez la classe de chacun de ces sous-groupes par rapport à l'élément 5. [4]

(e) Résolvez l'équation $2 * x * 4 * x * 4 = 2$. [4]

2. [Note maximale : 12]

La relation R est définie sur $\mathbb{Z}^+$ de sorte que aRb si et seulement si $b^n - a^n \equiv 0 (\bmod p)$, où n, p sont des entiers positifs fixés supérieurs à 1.

(a) Montrez que R est une relation d'équivalence. [7]

(b) Étant donné que $n = 2$ et $p = 7$, déterminez les quatre premiers membres de chacune des quatre classes d'équivalence de R. [5]

3. [Note maximale : 7]

Le groupe $\{G, *\}$ est abélien et la bijection $f : G \to G$ est définie par $f(x) = x^{-1}, x \in G$.
Montrez que f est un isomorphisme.

4. [Note maximale : 13]

La fonction f est définie par $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ où $f(x, y) = \left(\sqrt{xy}, \dfrac{x}{y}\right)$.

(a) Prouvez que f est une injection. [5]

(b) (i) Prouvez que f est une surjection.

(ii) À partir de là ou par toute autre méthode, écrivez la fonction réciproque f^{-1}. [8]

5. [Note maximale : 9]

Le groupe $\{G, *\}$ est défini sur l'ensemble G avec une opération binaire $*$. H est un sous-ensemble de G défini par $H = \{x : x \in G, a * x * a^{-1} = x \text{ pour tout } a \in G\}$. Prouvez que $\{H, *\}$ est un sous-groupe de $\{G, *\}$.