88137226

International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

MATEMÁTICAS
NIVEL SUPERIOR
PRUEBA 2

Número de convocatoria del alumno

0	0							

Martes 12 de noviembre de 2013 (mañana)

Código del examen

8	8	1	3	–	7	2	2	6

2 horas

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- Escriba su número de convocatoria en las casillas de arriba.
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Sección A: conteste todas las preguntas en las casillas provistas.
- Sección B: conteste todas las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Escriba su número de convocatoria en la parte delantera del cuadernillo de respuestas, y adjúntelo a este cuestionario de examen y a su portada utilizando los cordeles provistos.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del *cuadernillo de información* ***de Matemáticas NS y de Ampliación de Matemáticas NM*** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es *[120 puntos]*.

16EP01

No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. En particular, junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza una gráfica para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente la misma como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

SECCIÓN A

*Conteste **todas** las preguntas en las casillas provistas. De ser necesario, se puede continuar desarrollando la respuesta en el espacio que queda debajo de las líneas.*

1. *[Puntuación máxima: 4]*

Considere las matrices $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Halle la matriz $\boldsymbol{X}$ tal que $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

2. *[Puntuación máxima: 7]*

El cuarto término de una progresión aritmética es 34 y el décimo término es 76.

(a) Halle el primer término y la diferencia común. *[3]*

(b) La suma de los n primeros términos es mayor que 5000. Halle el menor valor posible de n. *[4]*

3. *[Puntuación máxima: 7]*

Considere $f(x) = \ln x - e^{\cos x}$, $0 < x \leq 10$.

(a) Dibuje aproximadamente la gráfica de $y = f(x)$, indicando las coordenadas de todos los máximos y mínimos y de los puntos de corte con el eje x. *[5]*

(b) Resuelva la inecuación $\ln x \leq e^{\cos x}$, $0 < x \leq 10$. *[2]*

4. *[Puntuación máxima: 6]*

A lo largo de un año dado, la duración de los vuelos directos que iban de Londres a Singapur siguió una distribución normal, de media μ y desviación típica σ.

El 92% de los vuelos duraron menos de 13 horas, mientras que solo el 12% de los vuelos duraron menos de 12 horas y 35 minutos.

Halle μ y σ, aproximando al número de minutos más próximo.

5. *[Puntuación máxima: 5]*

Al comienzo de cada semana, Eric y Marina escogen una noche al azar para ver una película.

Si eligen la noche del sábado, la probabilidad de que vean una película francesa es igual a $\frac{7}{9}$, mientras que si eligen cualquier otra noche, la probabilidad de que vean una película francesa es igual a $\frac{4}{9}$.

(a) Halle la probabilidad de que vean una película francesa. *[3]*

(b) Sabiendo que la semana pasada vieron una película francesa, halle la probabilidad de que la hayan visto la noche del sábado. *[2]*

6. *[Puntuación máxima: 6]*

Un número complejo z viene dado por $z = \dfrac{a+\mathrm{i}}{a-\mathrm{i}}$, $a \in \mathbb{R}$.

(a) Determine el conjunto de valores de a para los cuales

(i) z es real;

(ii) z es imaginario puro. *[4]*

(b) Compruebe que $|z|$ es constante para todo valor de a. *[2]*

7. *[Puntuación máxima: 6]*

Sean los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$, tales que $\boldsymbol{a} = (3\cos\theta + 6)\boldsymbol{i} + 7\boldsymbol{j}$ y $\boldsymbol{b} = (\cos\theta - 2)\boldsymbol{i} + (1 + \operatorname{sen}\theta)\,\boldsymbol{j}$.

Sabiendo que $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son perpendiculares,

(a) compruebe que $3\operatorname{sen}^2\theta - 7\operatorname{sen}\theta + 2 = 0$; *[3]*

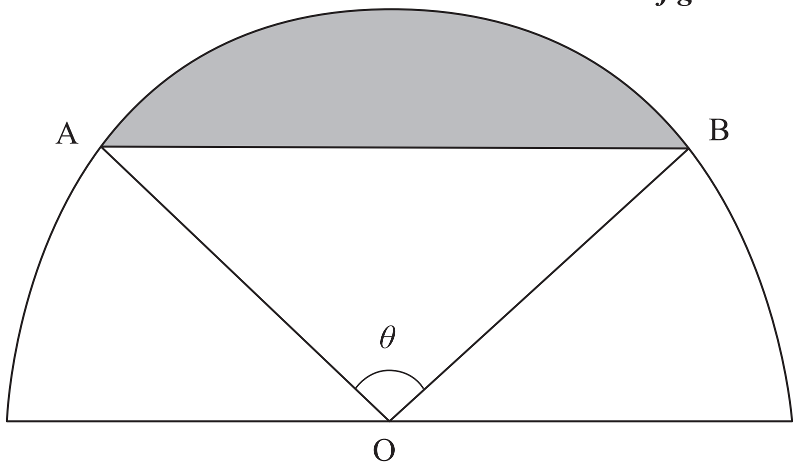
(b) halle el menor valor positivo posible de θ. *[3]*

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

8. *[Puntuación máxima: 5]*

La siguiente figura muestra un semicírculo de 20 cm de diámetro y centro O, y dos puntos A y B, tales que $\hat{AOB} = \theta$, donde θ está expresado en radianes.

la figura no está dibujada a escala



(a) Compruebe que el área de la región sombreada se puede expresar como $50\theta - 50 \operatorname{sen} \theta$. *[2]*

(b) Halle el valor de θ para el cual el área de la región sombreada es igual a la mitad del área de la región no sombreada, con una aproximación de cuatro cifras significativas. *[3]*

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

9. *[Puntuación máxima: 7]*

La recta L_1 tiene por ecuación $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

La recta L_2 pasa por el origen, corta a L_1 y es perpendicular a L_1.

(a) Halle una ecuación vectorial de L_2. *[5]*

(b) Determine la distancia más corta entre el origen y L_1. *[2]*

10. *[Puntuación máxima: 7]*

Utilizando la sustitución $x = 2\operatorname{tg} u$, compruebe que $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2+4}} = \frac{-\sqrt{x^2+4}}{4x} + C$.

***NO** escriba soluciones en esta página.*

SECCIÓN B

*Conteste **todas** las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Empiece una página nueva para cada respuesta.*

11. *[Puntuación máxima: 18]*

(a) El número de gatos que visitan el jardín de Helena cada semana sigue una distribución de Poisson de media $\lambda = 0,6$.

Halle la probabilidad de que

(i) en una semana dada, ningún gato visite el jardín de Helena;

(ii) en una semana dada, al menos tres gatos visiten el jardín de Helena;

(iii) a lo largo de un periodo de cuatro semanas, no más de cinco gatos en total visiten el jardín de Helena;

(iv) a lo largo de un periodo de doce semanas, haya exactamente cuatro semanas en las cuales al menos un gato visite el jardín de Helena. *[9]*

(b) Una variable aleatoria continua X tiene la siguiente función de distribución de probabilidad f

$$f(x) = k \ln x \quad 1 \le x \le 3$$
$$f(x) = 0 \quad \text{resto de valores}$$

(i) Halle el valor de k , con una aproximación de seis cifras decimales.

(ii) Halle el valor de $\mathrm{E}(X)$.

(iii) Indique la moda de X .

(iv) Halle la mediana de X . *[9]*

NO *escriba soluciones en esta página.*

12. *[Puntuación máxima: 20]*

(a) Una partícula P se mueve en línea recta a una velocidad de $v\,\text{ms}^{-1}$. En el instante $t=0$, P se encuentra en el punto O y tiene una velocidad de $12\,\text{ms}^{-1}$. Su aceleración en el instante t segundos viene dada por $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=3\cos\dfrac{t}{4}\,\text{ms}^{-2}$, $(t \ge 0)$.

(i) Halle una expresión para la velocidad de la partícula, v, en función de t.

(ii) Dibuje aproximadamente la gráfica de la velocidad de la partícula en función del tiempo para $0 \le t \le 8\pi$, mostrando claramente los puntos de corte de la curva con los ejes y todos los puntos máximos y mínimos que haya.

(iii) Halle la distancia que recorre la partícula antes de detenerse por primera vez. *[8]*

(b) Otra partícula Q se mueve en línea recta, siendo su desplazamiento s metros y su velocidad v ms^{-1}. Su aceleración viene dada por $a=-\left(v^2+4\right)\text{ms}^{-2}$, $(0 \le t \le 1)$. En el instante $t=0$, Q se encuentra en el punto O y tiene una velocidad de $2\,\text{ms}^{-1}$.

(i) Compruebe que la velocidad v en el instante t viene dada por $v=2\,\text{tg}\left(\dfrac{\pi-8t}{4}\right)$.

(ii) Compruebe que $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}=-\dfrac{\left(v^2+4\right)}{v}$.

(iii) Halle la distancia que recorre la partícula antes de detenerse. *[12]*

NO *escriba soluciones en esta página.*

13. *[Puntuación máxima: 22]*

Una función f viene dada por $f(x) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$, $x \in \mathbb{R}$.

(a) (i) Explique por qué no existe la función inversa f^{-1}.

(ii) Compruebe que la ecuación de la normal a la curva en el punto P, donde $x = \ln 3$, viene dada por $9x + 12y - 9\ln 3 - 20 = 0$.

(iii) Halle las coordenadas x de los puntos Q y R pertenecientes a la curva, tales que las tangentes en Q y R pasan por $(0, 0)$. *[14]*

(b) Ahora el dominio de f queda restringido a $x \geq 0$.

(i) Halle una expresión para $f^{-1}(x)$.

(ii) Halle el volumen generado cuando la región delimitada por la curva $y = f(x)$ y las rectas $x = 0$ e $y = 5$ se rota un ángulo de 2π radianes al-rededor del eje y. *[8]*

No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.

No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.