88107226

International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

MATEMÁTICAS
NIVEL SUPERIOR
PRUEBA 2

Viernes 5 de noviembre de 2010 (mañana)

2 horas

Número de convocatoria del alumno

0	0							

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- Escriba su número de convocatoria en las casillas de arriba.
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Sección A: conteste toda la sección A en los espacios provistos.
- Sección B: conteste toda la sección B en las hojas de respuestas provistas. Escriba su número de convocatoria en cada una de las hojas de respuestas, y adjúntelas a este cuestionario de examen y a su portada empleando los cordeles provistos.
- Cuando termine el examen, indique en la casilla correspondiente de la portada el número de hojas que ha utilizado.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.

No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. En particular, junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza una gráfica para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente la misma como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

SECCIÓN A

Conteste ***todas*** *las preguntas en los espacios provistos. De ser necesario, se puede continuar desarrollando la respuesta en el espacio que queda debajo de las líneas.*

1. *[Puntuación máxima: 6]*

En el triángulo ABC, $\text{AB} = 5 \text{ cm}$, $\text{BC} = 6 \text{ cm}$ y el área es de 10 cm^2.

(a) Halle $\operatorname{sen} \hat{B}$. *[2 puntos]*

(b) **A partir de lo anterior**, halle los dos valores posibles de AC, y dé sus respuestas con una aproximación de dos cifras decimales. *[4 puntos]*

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

2. *[Puntuación máxima: 4]*

La empresa *Agua Fresca* produce botellas de agua mineral de un litro. La empresa quiere determinar la cantidad de magnesio, en miligramos, que hay en estas botellas.

Se analiza una muestra aleatoria compuesta por diez botellas. Los resultados se muestran a continuación:

$$6{,}7;\ 7{,}2;\ 6{,}7;\ 6{,}8;\ 6{,}9;\ 7{,}0;\ 6{,}8;\ 6{,}6;\ 7{,}1;\ 7{,}3.$$

Halle una estimación sin sesgo de la media y de la varianza de la cantidad de magnesio presente en las botellas de un litro.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

3. *[Puntuación máxima: 5]*

La pérdida de peso, en kilogramos, de las personas que siguen el régimen adelgazante *DELGAMÁS* durante un período de tres meses está modelizada por una variable aleatoria X. Los datos experimentales mostraron que el 67 % de las personas que utilizaron *DELGAMÁS* perdieron hasta cinco kilogramos, mientras que el 12,4 % perdieron al menos siete kilogramos. Suponiendo que X sigue una distribución normal, halle la pérdida de peso esperada para una persona que siga durante tres meses la dieta *DELGAMÁS*.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

4. *[Puntuación máxima: 7]*

Halle la ecuación de la recta normal a la curva $x^3 y^3 - xy = 0$ en el punto $(1, 1)$.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

5. *[Puntuación máxima: 5]*

Resuelva las ecuaciones

$$\ln \frac{x}{y} = 1$$
$$\ln x^3 + \ln y^2 = 5.$$

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

6. *[Puntuación máxima: 7]*

Considere el polinomio $p(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$, donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Sabiendo que $1+\mathrm{i}$ y $1-2\mathrm{i}$ son ceros de $p(x)$, halle los valores de a, b, c y d.

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

7. *[Puntuación máxima: 6]*

La variable aleatoria X sigue una distribución de Poisson de media m. Para esta variable aleatoria se cumple que:

$$\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=3)=\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=2).$$

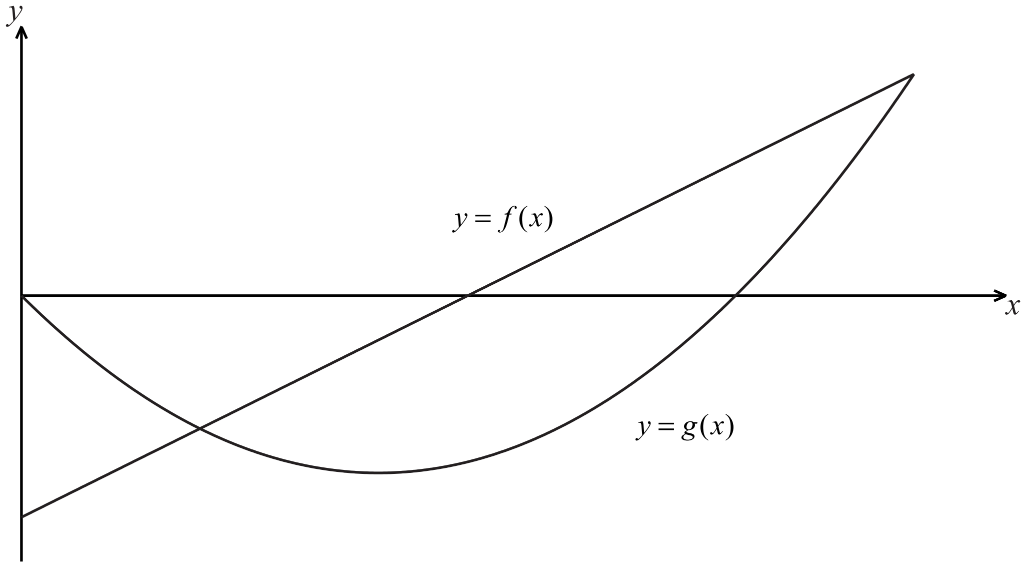
(a) Halle el valor de m, con una aproximación de cuatro cifras decimales. *[4 puntos]*

(b) Para este valor de m, calcule $\mathrm{P}(1 \le X \le 2)$. *[2 puntos]*

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

8. *[Puntuación máxima: 5]*

La siguiente figura muestra la gráfica de una función lineal f y la de una función cuadrática g.



Sobre esos mismos ejes de coordenadas, dibuje aproximadamente la gráfica de $\frac{f}{g}$. Indique claramente dónde se produce la intersección con el eje x y dónde se hallan las asíntotas.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

9. *[Puntuación máxima: 8]*

Considere los vectores $\boldsymbol{a} = \operatorname{sen}(2\alpha)\,\boldsymbol{i} - \cos(2\alpha)\,\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ y $\boldsymbol{b} = \cos\alpha\,\boldsymbol{i} - \operatorname{sen}\alpha\,\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$, donde $0 < \alpha < 2\pi$.

Sea θ el ángulo que forman los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$.

(a) Exprese $\cos\theta$ en función de α. *[2 puntos]*

(b) Halle el ángulo agudo α para el cual los dos vectores son perpendiculares. *[2 puntos]*

(c) Para $\alpha = \dfrac{7\pi}{6}$, determine el producto vectorial de $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ y comente el significado geométrico de este resultado. *[4 puntos]*

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

10. *[Puntuación máxima: 7]*

La recta $y = m(x - m)$ es tangente a la curva $(1 - x)y = 1$.

Determine m y las coordenadas del punto donde la tangente toca a la curva.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

NO *escriba soluciones en esta página. Cualquier trabajo escrito en esta página* ***NO*** *será corregido.*

SECCIÓN B

Conteste ***todas*** *las preguntas en las hojas de respuestas provistas. Empiece una página nueva para cada respuesta.*

11. *[Puntuación máxima: 21]*

Tim tira simultáneamente dos dados equilibrados e idénticos. Cada dado tiene seis caras. En dos caras está el número 1, en dos caras está el número 2 y en dos caras está el número 3. La puntuación de Tim es la suma de los dos números obtenidos con los dados.

(a) (i) Calcule la probabilidad de que la puntuación que obtiene Tim sea igual a 6.

(ii) Calcule la probabilidad de que la puntuación que obtiene Tim sea por lo menos 3. *[3 puntos]*

Tim juega con su amigo Bill, quien tiene también dos dados, numerados de la misma manera. La puntuación de Bill es la suma de los dos números obtenidos con sus dados.

(b) (i) Calcule la probabilidad de que Tim y Bill obtengan **ambos** una puntuación igual a 6.

(ii) Calcule la probabilidad de que Tim y Bill obtengan la misma puntuación. *[4 puntos]*

(c) Sea X el número más alto de los obtenidos con los cuatro dados.

(i) Compruebe que $\mathrm{P}(X \le 2) = \frac{16}{81}$.

(ii) Copie y complete la siguiente tabla de distribución de probabilidad.

x	1	2	3
$\mathrm{P}(X = x)$	$\frac{1}{81}$		

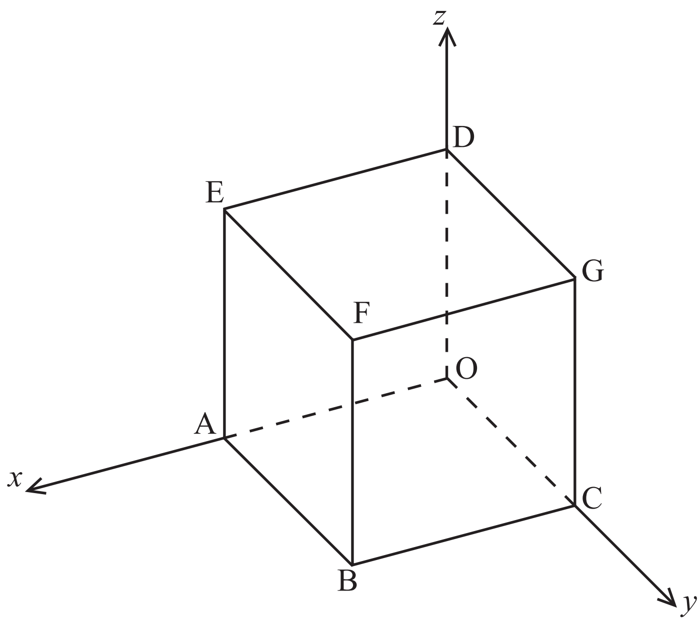
(iii) Calcule $\mathrm{E}(X)$ y $\mathrm{E}(X^2)$ y, a partir de lo anterior, halle $\mathrm{Var}(X)$. *[10 puntos]*

(d) Sabiendo que $X = 3$, halle la probabilidad de que la suma de los números en los cuatro dados sea igual a 8. *[4 puntos]*

***NO** escriba soluciones en esta página. Cualquier trabajo escrito en esta página **NO** será corregido.*

12. *[Puntuación máxima: 20]*

La siguente figura muestra un cubo OABCDEFG.



Sea O el origen, (OA) el eje x, (OC) el eje y y (OD) el eje z.
Sean M, N y P los puntos medios de [FG], [DG] y [CG], respectivamente.
Las coordenadas de F son $(2, 2, 2)$.

(a) Halle los vectores de posición $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$, $\overrightarrow{\mathrm{ON}}$ y $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ en función de sus componentes. *[3 puntos]*

(b) Halle $\overrightarrow{\mathrm{MP}} \times \overrightarrow{\mathrm{MN}}$. *[4 puntos]*

(c) **A partir de lo anterior**,

(i) calcule el área del triángulo MNP;

(ii) compruebe que la recta (AG) es perpendicular al plano MNP;

(iii) halle la ecuación del plano MNP. *[7 puntos]*

(d) Determine las coordenadas del punto donde la recta (AG) corta al plano MNP. *[6 puntos]*

***NO** escriba soluciones en esta página. Cualquier trabajo escrito en esta página **NO** será corregido.*

13. *[Puntuación máxima: 19]*

Sea $f(x) = \dfrac{a + be^x}{ae^x + b}$, donde $0 < b < a$.

(a) Compruebe que $f'(x) = \dfrac{(b^2 - a^2)e^x}{(ae^x + b)^2}$. *[3 puntos]*

(b) **A partir de lo anterior**, justifique por qué la gráfica de f no tiene ningún máximo ni ningún mínimo local. *[2 puntos]*

(c) Sabiendo que la gráfica de f tiene un punto de inflexión, halle sus coordenadas. *[6 puntos]*

(d) Compruebe que la gráfica de f tiene exactamente dos asíntotas. *[3 puntos]*

(e) Sean $a = 4$ y $b = 1$. Considere la región R delimitada por la gráfica de $y = f(x)$, el eje y, y la recta que tiene por ecuación $y = \dfrac{1}{2}$.

Halle el volumen V del sólido que se obtiene cuando R se gira 2π alrededor del eje x. *[5 puntos]*