MATEMÁTICAS
NIVEL SUPERIOR
PRUEBA 3

Lunes 15 de mayo de 2006 (tarde)

1 hora

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste todas las preguntas de una sola sección.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o correcta con tres cifras significativas.

Por favor comience cada pregunta en una página nueva. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. En particular, junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza una gráfica para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente la misma como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

SECCIÓN A

Estadística y probabilidad

1. *[Puntuación máxima: 8]*

Una compañía farmacéutica afirma que un nuevo medicamento que ellos producen cura al 75 % de los pacientes que sufren de una determinada enfermedad. Sin embargo, un comité médico a cargo del caso opina que cura a menos del 75 %. Para verificar si la afirmación de la compañía es correcta, se realiza una prueba en la cual se suministra el nuevo medicamento a 100 pacientes que sufren de esa enfermedad. Se encuentra que 68 de esos pacientes se curan.

(a) Establezca hipótesis adecuadas. *[2 puntos]*

(b) Halle el valor del parámetro p para su prueba. *[4 puntos]*

(c) Establezca su conclusión utilizando un nivel de significación de

(i) 10 %;

(ii) 1 %. *[2 puntos]*

2. *[Puntuación máxima: 12]*

Una expedición científica descubre una gran colonia de aves. Se obtienen los pesos x kg de una muestra aleatoria de 200 de esas aves y los resultados son los siguientes:

$$\sum x = 224{,}4 \ ; \ \sum (x - \bar{x})^2 = 5{,}823$$

(a) Calcule estimaciones no sesgadas de la media μ y la varianza σ^2 de los pesos de esas aves. *[4 puntos]*

(b) Halle un intervalo de confianza del 95 % para μ. *[6 puntos]*

(c) Establezca, indicando una razón, si su respuesta requiere suponer que los pesos están normalmente distribuidos. *[2 puntos]*

3. *[Puntuación máxima: 9]*

Sarah va al trabajo en bicicleta y cree que la media del tiempo que tarda en llegar es 30 minutos. Para verificarlo, registra durante 10 días el tiempo (en minutos) que tarda en llegar a su trabajo, y obtiene los siguientes datos:

30,1 32,3 33,6 29,8 28,9 30,6 31,1 30,2 32,1 29,4

Se puede suponer que los tiempos del viaje en bicicleta están normalmente distribuidos con media μ minutos.

(a) Establezca hipótesis adecuadas. *[2 puntos]*

(b) Pruebe la creencia de Sarah, con un nivel de significación del 5 %. *[5 puntos]*

(c) Justifique por qué eligió la prueba que utilizó. *[2 puntos]*

4. *[Puntuación máxima: 14]*

En una parada los autobuses llegan cada T minutos, donde puede suponerse que T tiene una distribución exponencial con función densidad de probabilidad

$$f(t) = \frac{1}{10}\mathrm{e}^{-\frac{t}{10}} \text{ para } t \geq 0\,.$$

(a) Compruebe que

(i) $\mathrm{P}(T > t) = \mathrm{e}^{-\frac{t}{10}}$;

(ii) $\mathrm{P}\left(T \leq t+s \,\middle|\, T > t\right) = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{s}{10}}$, donde $s > 0$. *[10 puntos]*

(b) Bill llega a la parada de autobús cinco minutos después de que el autobús anterior llegara a la parada. Halle la probabilidad de que el próximo autobús llegue a la parada dentro de los 10 minutos siguientes a que Bill llegara. *[4 puntos]*

5. *[Puntuación máxima: 17]*

Se cree que la variable aleatoria X tiene una distribución geométrica con función masa de probabilidad

$$\mathrm{P}(X = x) = p(1-p)^{x-1} \text{ para } x \in \mathbb{Z}^{+},$$

donde p es un parámetro desconocido.

El valor de X se registra en 100 ocasiones independientes con los siguientes resultados.

x	Frecuencia
1	45
2	26
3	16
4	10
5 o más	3

(a) (i) Calcule la media de estos datos.

(ii) Deduzca que el valor estimado de p es $\frac{1}{2}$. *[4 puntos]*

(b) Calcule un valor apropiado de χ^2. Pruebe si, a un nivel de significación del 5 %, estos datos pueden ser modelados con una distribución geométrica o no. *[13 puntos]*

SECCIÓN B

Conjuntos, relaciones y grupos

1. *[Puntuación máxima: 15]*

La función f es definida por

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \text{ donde } f(x)=\mathrm{e}^{\operatorname{sen} x}-1.$$

(a) Halle el recorrido exacto, A, de f. *[3 puntos]*

(b) (i) Explique por qué f no es inyectiva.

(ii) Dando una razón para su respuesta, indique si f es sobreyectiva o no. *[4 puntos]*

(c) La función g se define como $g:[-k, k]\to A$, donde $g(x)=\mathrm{e}^{\operatorname{sen} x}-1$ y $k>0$.

(i) Halle el valor máximo de k para el cual g es inyectiva.

Para ese valor de k,

(ii) halle una expresión para $g^{-1}(x)$;

(iii) escriba el dominio de g^{-1}. *[8 puntos]*

2. *[Puntuación máxima: 15]*

Sea $S=\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$. La relación R se define en S tal que para $a, b\in S$, aRb si y sólo si $a^2\equiv b^2$ (módulo 6).

(a) Compruebe que R es una relación de equivalencia. *[6 puntos]*

(b) Halle todas las clases de equivalencia. *[9 puntos]*

3. *[Puntuación máxima: 7]*

Considere la operación binaria a dividido b definida sobre $\mathbb{R}^+$. Determine si se satisface o no cada uno de los axiomas de grupo. *[7 puntos]*

4. *[Puntuación máxima: 15]*

Considere el grupo G definido en el conjunto $S = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$ que tiene la siguiente tabla de Cayley.

$*$	**1**	**2**	**4**	**5**	**7**	**8**
1	1	2	4	5	7	8
2	2	4	8	1	5	7
4	4	8	7	2	1	5
5	5	1	2	7	8	4
7	7	5	1	8	4	2
8	8	7	5	4	2	1

(a) Explique qué se entiende al decir que esta tabla es un cuadrado latino. *[1 punto]*

(b) Resuelva la ecuación

$$2 * x * 7 = 4 \text{ donde } x \in S.$$ *[4 puntos]*

(c) (i) Compruebe que G es cíclico y halle los generadores.

(ii) Enumere los subgrupos propios de G. *[10 puntos]*

5. *[Puntuación máxima: 8]*

Suponga que G es un grupo y H es un subconjunto no vacío de G. Compruebe que si $ab^{-1} \in H$, donde $a, b \in H$ entonces H es un subgrupo de G. *[8 puntos]*

SECCIÓN C

Series y ecuaciones diferenciales

1. *[Puntuación máxima: 9]*

Dado que $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y+2}{xy+1}$ y $y=1$ cuando $x=0$, utilice el método de Euler con intervalo $h=0{,}5$ para hallar un valor aproximado de y cuando $x=1$. *[9 puntos]*

2. *[Puntuación máxima: 12]*

(a) Compruebe que $\int \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x=\ln\sec x+C$, donde C es una constante. *[2 puntos]*

(b) A partir de lo anterior, halle un factor integrante para resolver la ecuación diferencial

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y\operatorname{tg} x=\sec x.$$ *[2 puntos]*

(c) Resuelva esta ecuación diferencial dado que $y=2$ cuando $x=0$.
Dé su respuesta en la forma $y=f(x)$. *[8 puntos]*

3. *[Puntuación máxima: 9]*

Halle el valor de

(a) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$; *[3 puntos]*

(b) $\lim_{x\to 0} x\ln x$. *[6 puntos]*

4. *[Puntuación máxima: 15]*

(a) (i) Dado que $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ es convergente, cuando $u_n \geq 0$, demuestre que $\sum_{n=1}^{\infty} {u_n}^2$ es también convergente.

(ii) Establezca, dando una razón, si la inversa de este resultado es verdadera o no. *[5 puntos]*

(b) Utilice el criterio de la integral para determinar el conjunto de valores de k para los cuales la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^k}$$

(i) es convergente;

(ii) es divergente. *[10 puntos]*

5. *[Puntuación máxima: 15]*

Considere la función f definida por

$$f(x) = \text{arcsen}\, x \text{, para } |x| \leq 1 .$$

Las derivadas de $f(x)$ satisfacen la ecuación

$$(1-x^2)f^{(n+2)}(x) - (2n+1)x\, f^{(n+1)}(x) - n^2 f^{(n)}(x) = 0, \text{ para } n \geq 1 .$$

El coeficiente de x^n en la serie de Maclaurin para $f(x)$ es denominado a_n. Puede asumir que la serie contiene solamente potencias impares de x.

(a) (i) Compruebe que, para $n \geq 1$, $(n+1)(n+2)a_{n+2} = n^2 a_n$.

(ii) Dado que $a_1 = 1$, halle una expresión para a_n en términos de n, válida para $n \geq 3$ impares. *[7 puntos]*

(b) Halle el radio de convergencia de esta serie de Maclaurin. *[4 puntos]*

(c) Halle un valor aproximado para π poniendo $x = \frac{1}{2}$ y sumando los primeros tres términos no nulos de la serie. Dé su respuesta con **cuatro** cifras significativas. *[4 puntos]*

SECCIÓN D

Matemáticas discretas

1. *[Puntuación máxima: 9]*

(a) Convierta el número 95 de la base 10 a la base 6. *[3 puntos]*

(b) Trabajando con la base 6, eleve al cuadrado su respuesta a la parte (a). *[4 puntos]*

(c) Convierta su respuesta a la parte (b) a un número de base 10. *[2 puntos]*

2. *[Puntuación máxima: 8]*

Considere la ecuación diofántica

$$\lambda x - 2y = 1, \text{ donde } \lambda \in \mathbb{Z}.$$

(a) Explique brevemente por qué esta ecuación no tiene solución cuando $\lambda = 4$. *[2 puntos]*

(b) Halle la solución general a esta ecuación cuando $\lambda = 3$. *[6 puntos]*

3. *[Puntuación máxima: 16]*

(a) Compruebe que la suma de los grados de todos los vértices de un grafo es par. *[3 puntos]*

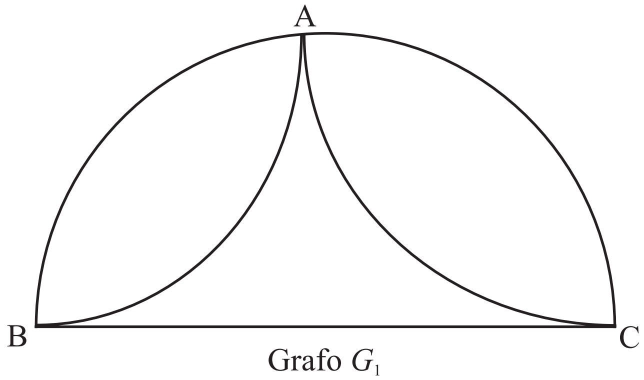
(b) En una fiesta hay nueve hombres. Considerando un grafo apropiado, compruebe que es imposible que cada uno de ellos le dé la mano a exactamente otros cinco. *[4 puntos]*

(c) Para un grafo planar conexo, demuestre la relación de Euler, $v - e + f = 2$. *[9 puntos]*

4. *[Puntuación máxima: 16]*

Los grafos G_1, G_2 y G_3 se ilustran debajo.

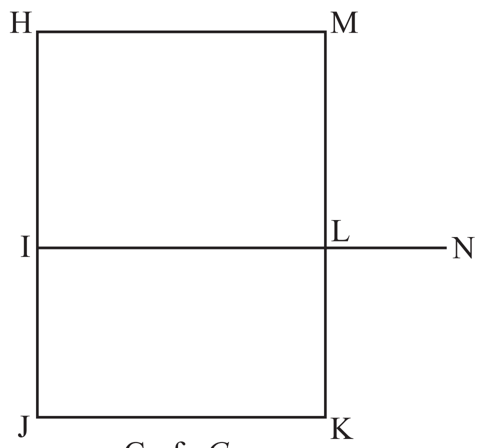
(a)



Grafo G_1

Escriba la matriz de adyacencia, $\boldsymbol{A}_G$, de G_1. Evalúe $\boldsymbol{A}_G{}^2$ y **a partir de lo anterior**, establezca el número de caminos de longitud 2 que comienzan y terminan en C. *[6 puntos]*

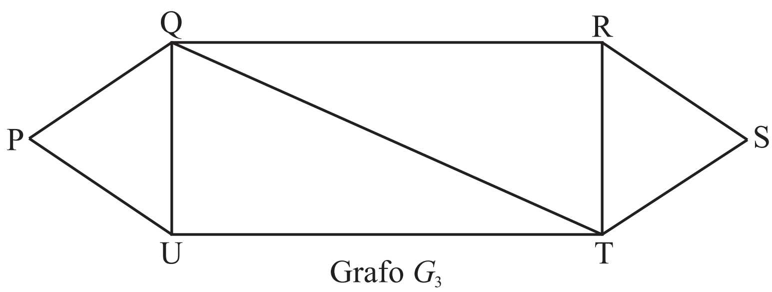
(b)



Grafo G_2

Determine si G_2 es bipartido. *[4 puntos]*

(c)



Grafo G_3

Explique brevemente por qué G_3 no tiene un circuito euleriano. Vuelva a dibujar G_3 y agregue una arista de modo que el grafo resultante tenga un circuito euleriano. Escriba un circuito euleriano. *[6 puntos]*

5. *[Puntuación máxima: 11]*

Los pesos de las aristas de un grafo con vértices A, B, C, D y E son proporcionados por la siguiente tabla.

	A	B	C	D	E
A	-	10	15	11	16
B	10	-	12	19	13
C	15	12	-	18	14
D	11	19	18	-	17
E	16	13	14	17	-

(a) Utilice cualquier método para hallar un límite superior para el problema del viajante para este grafo. *[2 puntos]*

(b) (i) Utilice el algoritmo de Kruskal para hallar y dibujar un árbol generador minimal para el subgrafo que se obtiene al quitar el vértice E del grafo.

(ii) Establezca el peso total de este árbol generador minimal y, a partir de lo anterior, halle un límite inferior para el problema del viajante para este grafo. *[9 puntos]*