MATHÉMATIQUES
NIVEAU SUPÉRIEUR
ÉPREUVE 1

Mercredi 3 mai 2006 (après-midi)

2 heures

Numéro de session du candidat

0	0							

INSTRUCTIONS DESTINÉES AUX CANDIDATS

- Écrivez votre numéro de session dans la case ci-dessus.
- N’ouvrez pas cette épreuve avant d’y être autorisé(e).
- Répondez à toutes les questions dans les espaces prévus à cet effet.
- Sauf indication contraire dans l’intitulé de la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.

Le total des points ne sera pas nécessairement attribué pour une réponse correcte si le raisonnement n'a pas été indiqué. Les réponses doivent être appuyées par un raisonnement et/ou des explications. En particulier, les solutions obtenues à l'aide d'une calculatrice à écran graphique doivent être accompagnées d'un raisonnement adéquat. Par exemple, si des représentations graphiques sont utilisées pour trouver la solution, veuillez inclure une esquisse de ces représentations graphiques dans votre réponse. Lorsque la réponse est fausse, certains points peuvent être attribués si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. On vous recommande donc de montrer tout votre raisonnement. Si cela est nécessaire, vous pouvez poursuivre votre raisonnement en dessous des lignes.

1. Dans une suite arithmétique le deuxième terme est 7 et la somme des cinq premiers termes est 50. Trouvez la raison de cette suite arithmétique.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

2. Soit $z_1 = r\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$ et $z_2 = 1 + \sqrt{3}\,\mathrm{i}$.

(a) Donnez z_2 sous la forme module et argument.

(b) Trouvez la valeur de r si $\left|z_1 z_2^{\,3}\right| = 2$.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

3. La représentation graphique de $y = 2x^2 + 4x + 7$ est translatée par le vecteur $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Trouvez l'équation de la représentation graphique translatée, en donnant votre réponse sous la forme $y = ax^2 + bx + c$.

4. Soit $f(x) = 3x^2 - x + 4$. Trouvez les valeurs de m pour les quelles la droite $y = mx + 1$ est une tangente à la représentation graphique de f.

5. Le polynôme $P(x) = 2x^3 + ax^2 - 4x + b$ est divisible par $(x-1)$ et par $(x+3)$. Trouvez les valeurs de a et de b.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

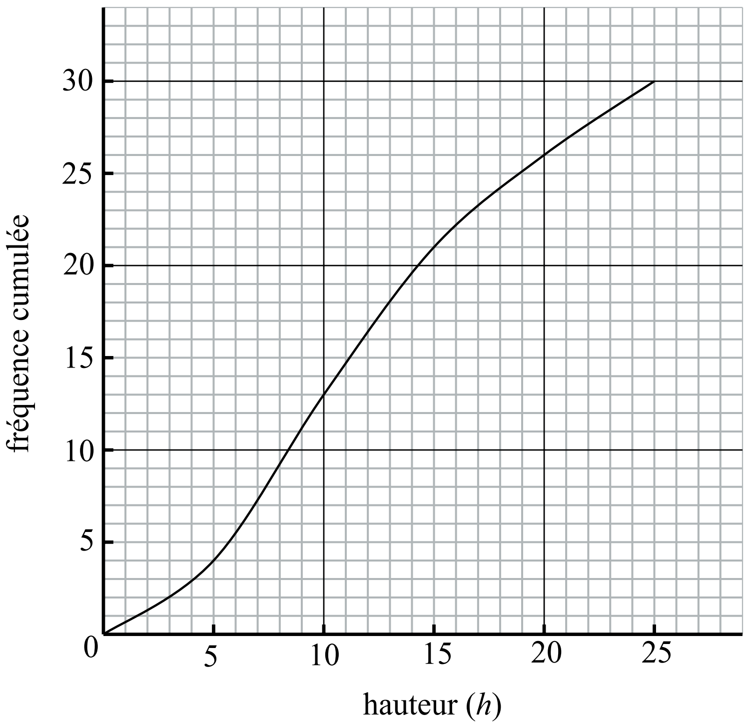
. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

6. La fréquence cumulée des hauteurs de 30 plantes exprimées en centimètres est représentée sur la figure suivante.



(a) Utilisez la figure pour estimer la hauteur médiane.

. . . .

. . . .

(b) Complétez le tableau de fréquence suivant.

Hauteur (h)	Fréquence
$0 \leq h < 5$	4
$5 \leq h < 10$	9
$10 \leq h < 15$	
$15 \leq h < 20$	
$20 \leq h < 25$	

(c) À partir de là estimez la hauteur moyenne.

. . . .

. . . .

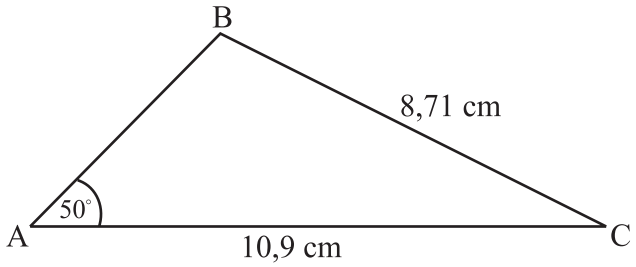
. . . .

. . . .

. . . .

7. Dans le triangle **obtusangle** ABC, $\text{AC} = 10{,}9\ \text{cm}$, $\text{BC} = 8{,}71\ \text{cm}$ et $\text{B}\hat{\text{A}}\text{C} = 50^\circ$.

pas à l'échelle



Trouvez l'aire du triangle ABC.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

8. Les poids en grammes des miches de pain vendues dans un supermarché sont normalement distribués avec une moyenne de 200 g. Les poids de $88\ \%$ des miches sont inférieurs à 220 g. Trouvez l'écart type.

9. Résolvez $\left|\ln(x+3)\right| = 1$. Donnez vos réponses sous forme **exacte**.

10. Soit $f(x) = 2^{0,5x}$ et $g(x) = 3^{-0,5x} + \frac{5}{3}$. Soit R la région limitée complètement par les représentations graphiques de f et g, et l'axe des ordonnées. Trouvez l'aire de R.

11. Soit $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ p \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(a) Trouvez $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$.

(b) Trouvez la valeur de p, sachant que $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ est parallèle à $\boldsymbol{c}$.

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

12. Trouvez $\int e^{2x} \sin x \, dx$.

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

13. Soit A et B deux événements tels que $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{5}$, $\mathrm{P}(B \mid A)=\frac{1}{4}$ et $\mathrm{P}(A \cup B)=\frac{7}{10}$.

(a) Trouvez $\mathrm{P}(A \cap B)$.

(b) Trouvez $\mathrm{P}(B)$.

(c) Montrez que A et B **ne** sont **pas** indépendants.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

14. Soit $f(x) = \cos^3(4x+1)$, $0 \le x \le 1$.

(a) Trouvez $f'(x)$.

(b) Trouvez les valeurs **exactes** des trois solutions de $f'(x) = 0$.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

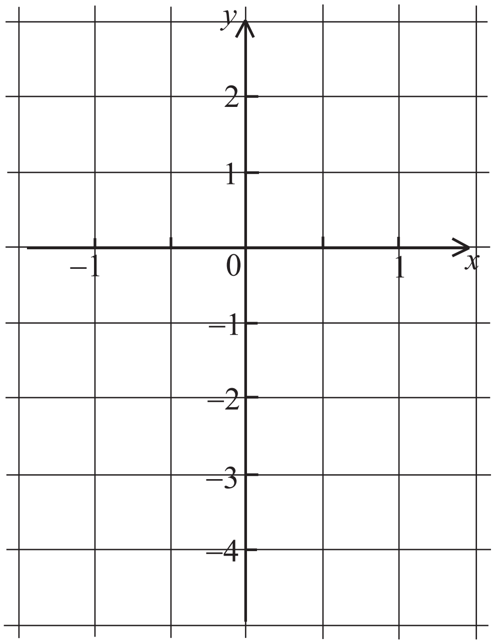
. . . .

. . . .

. . . .

15. Soit f la fonction $f(x) = x \arccos x + \frac{1}{2}x$ pour $-1 \le x \le 1$ et g la fonction $g(x) = \cos 2x$ pour $-1 \le x \le 1$.

(a) Dans le repère suivant, esquissez les représentations graphiques de f et de g.



(b) Donnez la solution de l'équation $f(x) = g(x)$.

(c) Donnez l'image de g.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

16. Le nombre d'accidents de voiture ayant lieu par jour sur une autoroute suit une distribution de Poisson de moyenne $1,5$.

(a) Trouvez la probabilité que plus de deux accidents arrivent en un lundi donné.

(b) Sachant qu'au moins un accident arrive un autre jour, trouvez la probabilité que plus de deux accidents arrivent en ce même jour.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

17. Soit $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ k & -1 \end{pmatrix}$ et $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} h & 3 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$, où h et k sont des entiers. Sachant que $\det \boldsymbol{A} = \det \boldsymbol{B}$ et que $\det \boldsymbol{AB} = 256h$,

(a) montrez que h vérifie l'équation $49h^2 - 130h + 81 = 0$;

(b) à partir de là trouvez la valeur de k.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

18. Étant donné que $3^{x+y} = x^3 + 3y$, trouvez $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

19. Il y a une rangée de 10 sièges dans une salle d'attente. Il y a six personnes dans la salle.

(a) De combien de façons différentes peuvent-elles s'asseoir ?

(b) Dans ce groupe de six personnes, il y a trois sœurs qui doivent être assises les unes à côté des autres. De combien de façons différentes le groupe peut-il être assis ?

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

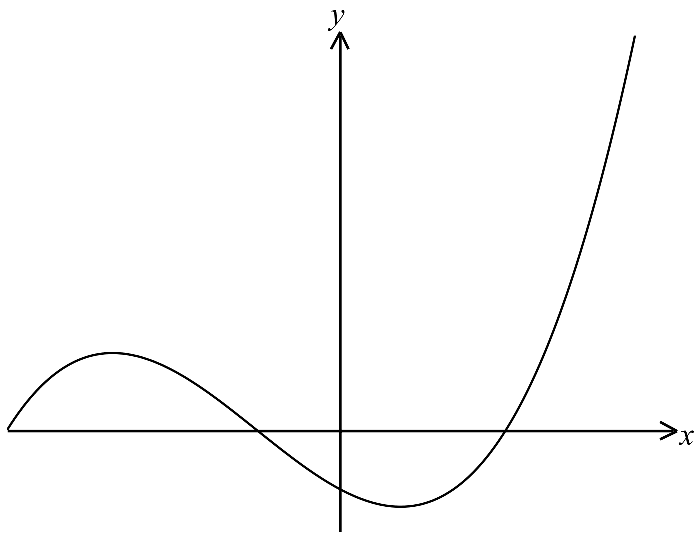
. . . .

. . . .

. . . .

20. Chacune des figures suivantes montre la représentation graphique d'une fonction f. Esquissez dans le même repère la représentation graphique de :

(a) $|f(-x)|$;



(b) $\dfrac{1}{f(x)}$.