MATEMÁTICAS
NIVEL SUPERIOR
PRUEBA 2

Jueves 4 de mayo de 2006 (mañana)

2 horas

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste todas las preguntas.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o correcta con tres cifras significativas.

1. *[Puntuación máxima: 21]*

Sea A el punto $(2, -1, 0)$, B el punto $(3, 0, 1)$ y C el punto $(1, m, 2)$, donde $m \in \mathbb{Z}$, $m < 0$.

(a) (i) Halle el producto escalar $\overrightarrow{\mathrm{BA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}}$.

(ii) A partir de lo anterior, dado que $\mathrm{A\hat{B}C} = \arccos \frac{\sqrt{2}}{3}$, compruebe que $m = -1$. *[6 puntos]*

(b) Determine la ecuación cartesiana del plano ABC. *[4 puntos]*

(c) Halle el área del triángulo ABC. *[3 puntos]*

(d) (i) La recta L es perpendicular al plano ABC y pasa por A. Halle una ecuación vectorial de L.

(ii) El punto $\mathrm{D}(6, -7, 2)$ pertenece a L. Halle el volumen de la pirámide ABCD. *[8 puntos]*

2. *[Puntuación máxima: 21]*

Sea $z = \cos\theta + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\theta$, para $-\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4}$.

(a) (i) Halle z^3 usando el teorema del binomio.

(ii) Utilice el teorema de de Moivre para comprobar que

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta \text{ y } \mathrm{sen}\,3\theta = 3\,\mathrm{sen}\,\theta - 4\,\mathrm{sen}^3\,\theta.$$ *[10 puntos]*

(b) **A partir de lo anterior**, demuestre que $\dfrac{\mathrm{sen}\,3\theta - \mathrm{sen}\,\theta}{\cos 3\theta + \cos\theta} = \mathrm{tg}\,\theta$. *[6 puntos]*

(c) Dado que $\mathrm{sen}\,\theta = \frac{1}{3}$, halle el valor **exacto** de $\mathrm{tg}\,3\theta$. *[5 puntos]*

3. *[Puntuación máxima: 23]*

La partícula A se mueve en línea recta desde el punto O_A, de modo que su velocidad en metros por segundo para $0 \le t \le 9$ está dada por

$$v_A = -\frac{1}{2}t^2 + 3t + \frac{3}{2}.$$

La partícula B se mueve en línea recta desde el punto O_B, de modo que su velocidad en metros por segundo para $0 \le t \le 9$ está dada por

$$v_B = e^{0,2t}.$$

(a) Halle el valor máximo de v_A, justificando que sea un máximo. *[5 puntos]*

(b) Halle la aceleración de B cuando $t = 4$. *[3 puntos]*

Los desplazamientos de A y B desde O_A y O_B respectivamente, para un tiempo *t* son s_A metros y s_B metros. Cuando $t = 0$, $s_A = 0$, y $s_B = 5$.

(c) Halle una expresión para s_A y para s_B, dando sus respuestas en función de *t*. *[7 puntos]*

(d) (i) Dibuje aproximadamente en un mismo gráfico, las curvas de s_A y s_B.

(ii) Halle los valores de *t* para los cuales $s_A = s_B$. *[8 puntos]*

4. *[Puntuación total: 31]*

Parte A *[Puntuación máxima: 12]*

El tiempo, T minutos, requerido a los alumnos para responder una pregunta en un examen de matemáticas tiene una función densidad de probabilidad

$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{72}(12t-t^2-20), & \text{para } 4\le t\le 10\\ 0, & \text{en los demás casos.}\end{cases}$$

(a) Halle

(i) μ, el valor esperado de T;

(ii) σ^2, la varianza de T. *[7 puntos]*

(b) Se elige un alumno al azar. Halle la probabilidad de que el tiempo que tarde este alumno para responder la pregunta se encuentre en el intervalo $[\mu-\sigma, \mu]$. *[5 puntos]*

Parte B *[Puntuación máxima: 19]*

Andrew dispara 20 flechas a un blanco. Tiene una probabilidad de dar en el blanco de 0,3. Todos los disparos son independientes entre sí. Sea X el número de flechas que dan en el blanco.

(a) Halle la media y la desviación típica de X. *[5 puntos]*

(b) Halle

(i) $\mathrm{P}(X=5)$;

(ii) $\mathrm{P}(4\le X\le 8)$. *[6 puntos]*

Bill también dispara flechas a un blanco, con una probabilidad de dar en el blanco de 0,3. Todos los disparos son independientes entre sí.

(c) Calcule la probabilidad de que Bill dé en el blanco por primera vez en su tercer disparo. *[3 puntos]*

(d) Calcule el número mínimo de disparos necesarios para que la probabilidad de que al menos un disparo dé en el blanco sea superior a 0,99. *[5 puntos]*

5. *[Puntuación máxima: 24]*

Considere el sistema de ecuaciones $\boldsymbol{T}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -42 \end{pmatrix}$, donde $\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & r \\ 3r & 0 & s \end{pmatrix}$.

(a) Halle la solución del sistema de ecuaciones cuando $r = 0$ y $s = 3$. *[4 puntos]*

(b) La solución del sistema no es única.

(i) Compruebe que $s = \frac{9}{2}r^2$.

(ii) Cuando $r = 2$ y $s = 18$, compruebe que el sistema se puede resolver y halle la solución general. *[11 puntos]*

(c) Utilice inducción matemática para demostrar que, cuando $r = 0$,

$$\boldsymbol{T}^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 2^n - (-1)^n & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & s^n \end{pmatrix}, n \in \mathbb{Z}^+.$$

[9 puntos]