IB DIPLOMA PROGRAMME
PROGRAMME DU DIPLÔME DU BI
PROGRAMA DEL DIPLOMA DEL BI

M05/5/MATHL/HP2/FRE/TZ0/XX

22057211

MATHÉMATIQUES
NIVEAU SUPÉRIEUR
ÉPREUVE 2

Mercredi 4 mai 2005 (matin)

3 heures

INSTRUCTIONS DESTINÉES AUX CANDIDATS

- N'ouvrez pas cette épreuve avant d'y être autorisé.
- Répondez à toutes les questions de la section A et à une question de la section B.
- Sauf indication contraire dans l'intitulé de la question, les réponses numériques devront être exactes ou à trois chiffres significatifs près.

Veuillez répondre à chaque question sur une nouvelle page. On vous recommande d'indiquer votre raisonnement autant que possible. Lorsque la réponse est fausse, certains points seront accordés si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. Les solutions obtenues à l'aide de calculatrices à écran graphique doivent être accompagnées d'un raisonnement adéquat. Par exemple, si des graphiques sont utilisés pour trouver la solution, veuillez inclure un croquis de ces derniers dans votre réponse.

SECTION A

Répondez aux ***cinq*** *questions de cette section.*

1. *[Note maximum: 14]*

(a) Soit $\boldsymbol{R}$ une rotation de k degrés, de centre (0 ; 0). $\boldsymbol{R}$ envoie le point (5 ; 10) sur le point (–2 ; 11). Trouvez la matrice $\boldsymbol{R}$. *[6 points]*

(b) Une transformation $\boldsymbol{T}$ est représentée par la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Décrivez l'effet géométrique d'appliquer la transformation $\boldsymbol{T}$ quatre fois successivement. *[2 points]*

(c) La matrice $\boldsymbol{Q}$ représente la rotation $\boldsymbol{R}$ suivie de la transformation $\boldsymbol{T}$. Montrez que

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1{,}4 & -0{,}2 \end{pmatrix}.$$ *[1 point]*

(d) Pour la transformation $\boldsymbol{Q}$, trouvez

(i) l'ensemble des points qui sont envoyés sur eux-mêmes ;

(ii) l'image de la droite $y = -x$. *[5 points]*

2. *[Note maximum: 13]*

La fonction f est définie par $f(x) = \mathrm{e}^{px}(x+1)$, où $p \in \mathbb{R}$.

(a) (i) Montrez que $f'(x) = \mathrm{e}^{px}\left(p(x+1)+1\right)$.

(ii) Soit $f^{(n)}(x)$ le résultat obtenu en dérivant $f(x)$ n fois par rapport à x. Prouvez, en utilisant un raisonnement par récurrence, que

$$f^{(n)}(x) = p^{n-1}\mathrm{e}^{px}\left(p(x+1)+n\right),\ n \in \mathbb{Z}^+.$$ *[7 points]*

(b) Quand $p = \sqrt{3}$, il y a un point minimum et un point d'inflexion sur la courbe de f. Trouvez la valeur **exacte** de l'abscisse x

(i) du point minimum ;

(ii) du point d'inflexion. *[4 points]*

(c) On suppose $p = \dfrac{1}{2}$. Soit R la région limitée par la courbe, l'axe des abscisses Ox et les droites $x = -2$ et $x = 2$. Trouvez l'aire de R. *[2 points]*

3. *[Note maximum: 12]*

(a) Le plan π_1 a pour équation $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-2\\1\\8\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\-3\\-9\end{pmatrix}$.

Le plan π_2 a pour équation $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

(i) Pour les points qui sont dans π_1 et π_2, montrez que $\lambda = \mu$.

(ii) À partir de là, ou par toute autre méthode, trouvez une équation vectorielle de la droite d'intersection de π_1 et π_2. *[5 points]*

(b) Le plan π_3 contient la droite $\dfrac{2-x}{3} = \dfrac{y}{-4} = z+1$ et est perpendiculaire à $3\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$. Trouvez l'équation cartésienne de π_3. *[4 points]*

(c) Trouvez l'intersection de π_1, π_2 et π_3. *[3 points]*

4. *[Note maximum: 16]*

Une entreprise achète 44 % de son stock de boulons à un producteur A et le reste à un producteur B. Les diamètres des boulons fabriqués par chacun des producteurs suivent une distribution normale avec un écart-type de 0,16 mm.

Le diamètre moyen des boulons fabriqués par le producteur A est 1,56 mm.
24,2 % des boulons fabriqués par le producteur B ont un diamètre inférieur à 1,52 mm.

(a) Trouvez le diamètre moyen des boulons fabriqués par le producteur B. *[3 points]*

Un boulon est choisi au hasard dans le stock de l'entreprise.

(b) Montrez que la probabilité pour que le diamètre soit inférieur à 1,52 mm est 0,312 avec trois chiffres significatifs. *[4 points]*

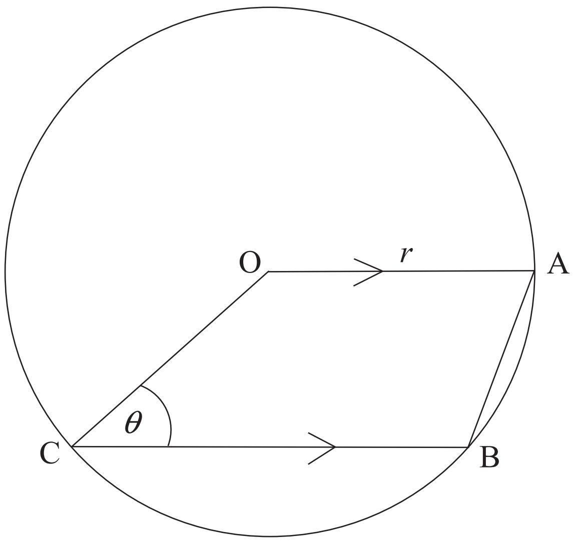
(c) On trouve que le diamètre du boulon est inférieur à 1,52 mm. Trouvez la probabilité que le boulon ait été fabriqué par le producteur B. *[3 points]*

(d) Le producteur B fait 8000 boulons par jour. Il fait un profit de 1,50 $ sur chaque boulon vendu, à la condition que son diamètre mesure entre 1,52 mm et 1,83 mm.
Les boulons dont le diamètre mesure moins de 1,52 mm doivent être jetés pour une perte de 0,85 $ par boulon.
Les boulons dont le diamètre mesure plus de 1,83 mm sont vendus avec un profit limité de 0,50 $ par boulon.

Trouvez le profit espéré du producteur B. *[6 points]*

5. *[Note maximum: 15]*

La figure représente un trapèze OABC dans lequel OA est parallèle à CB. O est le centre d'un cercle de rayon r cm. A, B et C sont sur sa circonférence. Angle $\text{OCB} = \theta$.



T représente l'aire du trapèze OABC.

(a) Montrez que $T = \dfrac{r^2}{2}(\sin\theta + \sin 2\theta)$. *[4 points]*

Pour une valeur **constante** de r, la valeur de T varie lorsque la valeur de θ varie.

(b) Montrez que T passe par sa valeur maximum lorsque θ vérifie l'équation $4\cos^2\theta + \cos\theta - 2 = 0$, et vérifiez que cette valeur de T est un maximum. *[5 points]*

(c) Sachant que le périmètre du trapèze est 75 cm, trouvez la valeur maximum de T. *[6 points]*

SECTION B

*Répondez à **une** question de cette section.*

Statistiques

6. *[Note maximum: 30]*

(i) Soit X une variable aléatoire ayant une distribution de Poisson, telle que $\mathrm{P}(X > 2) = 0{,}404$. Trouvez $\mathrm{P}(X < 2)$. *[4 points]*

(ii) Une urne contient un grand nombre de boules noires et blanches. On affirme que deux tiers $\left(\frac{2}{3}\right)$ des boules sont blanches. Pour vérifier cette affirmation, cinq boules sont tirées au hasard de l'urne et cette expérience est répétée 243 fois, avec les résultats suivants:

Nombre de boules blanches dans l'échantillon	0	1	2	3	4	5
Nombre d'occurrences d'un tel échantillon	8	9	52	78	70	26

Au seuil de signification de 5 % , l'affirmation peut-elle être acceptée ? *[8 points]*

(iii) Peter élève deux canes Ann et Bet d'espèces différentes. Il utilise un test pour déterminer si les œufs pondus par chacune des canes ont ou n'ont pas en moyenne le même poids. Il pèse 12 œufs pondus successivement par chacune des canes et obtient les résultats ci-dessous ; les poids sont donnés en grammes.

Ann	63,1	63,6	65,3	65,7	62,0	64,8	64,3	63,2	64,9	66,6	64,1	62,3
Bet	66,8	66,9	64,1	64,0	65,8	63,6	67,2	66,4	67,3	65,0	67,3	65,1

On peut supposer que les poids sont normalement distribués avec un même écart-type de 2 grammes.

(a) Écrivez des hypothèses adaptées au test souhaité. *[1 point]*

(b) (i) Calculez une statistique appropriée pour tester les hypothèses.

(ii) Avec un seuil de signification de 5 %, déterminez si les œufs pondus par chacune des canes ont le même poids moyen. *[6 points]*

(c) Déterminez le niveau maximum de signification pour lequel vous pouvez conclure qu'il n'y pas de différence entre les poids moyens des œufs pondus par chacune des canes. *[2 points]*

(Suite de la question à la page suivante)

(Suite de la question 6)

(iv) La variable aléatoire X est normalement distribuée avec une moyenne μ. On observe un échantillon aléatoire de 12 valeurs de X et on trouve que

$$\sum_{i=1}^{12}(x_i - \bar{x})^2 = 99.$$

(a) Déterminez un intervalle de confiance à 95 % pour μ. *[5 points]*

(b) Un autre intervalle de confiance, [60,31 ; 65,69], est calculé à partir de cet échantillon. Trouvez le niveau de confiance pour cet intervalle. *[4 points]*

Ensembles, relations et groupes

7. *[Note maximum: 30]*

(i) On définit l'opération # sur les ensembles A et B par $A\#B = A' \cup B'$.

Montrez algébriquement que

(a) $A\#A = A'$; *[1 point]*

(b) $(A\#A)\#(B\#B) = A \cup B$; *[2 points]*

(c) $(A\#B)\#(A\#B) = A \cap B$. *[3 points]*

(ii) Soit $S = \{\text{les entiers supérieurs à } 1\}$. La relation R est définie sur S par

$$m R n \Leftrightarrow \text{pgcd}(m, n) > 1, \text{ pour } m, n \in S.$$

(a) Montrez que R est réflexive. *[1 point]*

(b) Montrez que R est symétrique. *[2 points]*

(c) Montrez en utilisant un contre-exemple que R n'est pas transitive. *[3 points]*

(iii) Soit $T = \{\text{tous les nombres réels sauf } 1\}$. L'opération $*$ est définie sur T par

$$a * b = ab - a - b + 2, \text{ pour } a, b \in T.$$

(a) Montrez que T est fermé pour l'opération $*$. *[5 points]*

Vous pouvez supposer pour la suite que T muni de l'opération $*$ est un groupe.

(b) Déterminez l'élément neutre de T pour $*$. *[3 points]*

(c) (i) Démontrez par récurrence que

$$\overbrace{a * a * \cdots * a}^{n \text{ fois}} = (a-1)^n + 1, \ n \in \mathbb{Z}^+.$$

(Notez que $\overbrace{a * a * \cdots * a}^{5 \text{ fois}} = a * a * a * a * a$).

(ii) Montrez à partir de là qu'il y a exactement un élément de T qui est d'ordre fini, sans compter l'élément neutre. Trouvez cet élément et son ordre. *[10 points]*

Mathématiques discrètes

8. *[Note maximum: 30]*

(i) (a) En utilisant l'algorithme d'Euclide, trouvez le plus grand commun diviseur, *d*, de 272 et 656. *[3 points]*

(b) À partir de là, exprimez *d* sous la forme 272*a* + 656*b*, avec $a, b \in \mathbb{Z}$. *[3 points]*

(ii) La matrice associée à un graphe *G* est donnée par

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccc} A & B & C & D & E & F \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

(a) Dessinez le graphe *G*. *[2 points]*

(b) Expliquez pourquoi *G* a un circuit eulérien. Trouvez un tel circuit. *[3 points]*

(c) Trouvez une chaîne hamiltonienne. *[1 point]*

(iii) Les termes d'une suite $\{u_n\}$ vérifient l'équation aux différences

$$u_{n+2} - 2\lambda u_{n+1} + \lambda^2 u_n = 0, \text{ avec } n \in \mathbb{Z}^+ \text{ et } \lambda \in \mathbb{R}.$$

(a) Montrez que $u_n = \lambda^n$ et $u_n = n\lambda^n$ vérifient toutes les deux cette équation aux différences. À partir de là, écrivez la solution générale de cette équation aux différences. *[5 points]*

(b) Les termes de la suite $\{v_n\}$ vérifient l'équation

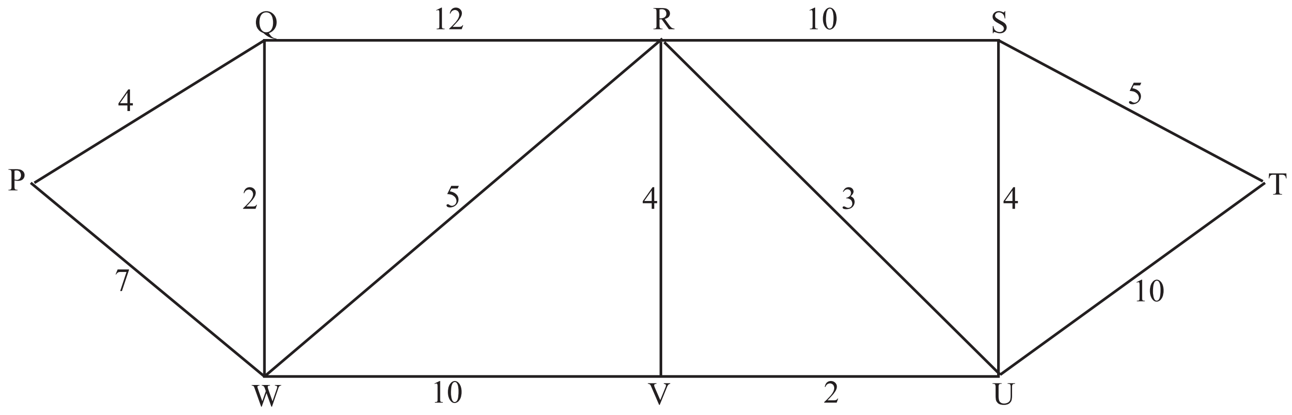
$$v_{n+2} - 6v_{n+1} + 9v_n = 0, \text{ avec } n \in \mathbb{Z}^+, \text{ et } v_1 = 2, v_2 = 9.$$

Trouvez une expression de v_n en fonction de *n*. *[5 points]*

(Suite de la question à la page suivante)

(Suite de la question 8)

(iv) La figure ci-dessous représente un graphe pondéré.



Utilisez l'algorithme de Dijkstra pour trouver la longueur de la chaîne élémentaire la plus courte entre les sommets P et T. Montrez toutes les étapes utilisées dans l'algorithme et écrivez la chaîne élémentaire la plus courte. *[8 points]*

Analyse et approximation

9. *[Note maximum: 30]*

(i) Sachant que $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$ et que $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$,

trouvez les quatre premiers termes non nuls de la série de Maclaurin de la fonction $e^{-x}\ln(1+x)$. *[6 points]*

(ii) Soit $I = \int_2^{3,2} \left(\frac{\ln x}{x^2}\right) \mathrm{d}x$.

(a) Utilisez la méthode des trapèzes avec **six** sous-intervalles pour estimer la valeur de I. *[4 points]*

(b) Combien de sous-intervalles sont nécessaires pour que l'erreur dans l'estimation de I soit inférieure à 10^{-5} ? *[8 points]*

(iii) Soit $g(x) = \sin^3 x + \cos x$, avec $1 \le x \le 1,5$.

Utilisez la méthode de Newton-Raphson pour trouver, avec une erreur inférieure à 10^{-8}, une approximation de a tel que $g(a)$ soit un **maximum**. *[7 points]*

(iv) Trouvez le rayon de convergence de la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-2)!}{k!(k-1)!} x^k$. *[5 points]*

Géométrie euclidienne et sections coniques

10. *[Note maximum: 30]*

(i) La droite $3x + y = 12$ coupe l'axe des ordonnées Oy en P, l'axe des abscisses Ox en Q, la droite $y - x = 0$ en R et la droite $y + x = 0$ en S. Montrez que P, Q, R, S divisent le segment [PS] dans un rapport harmonique. *[9 points]*

(ii) La droite l de pente m passe par le point (1 ; 0).

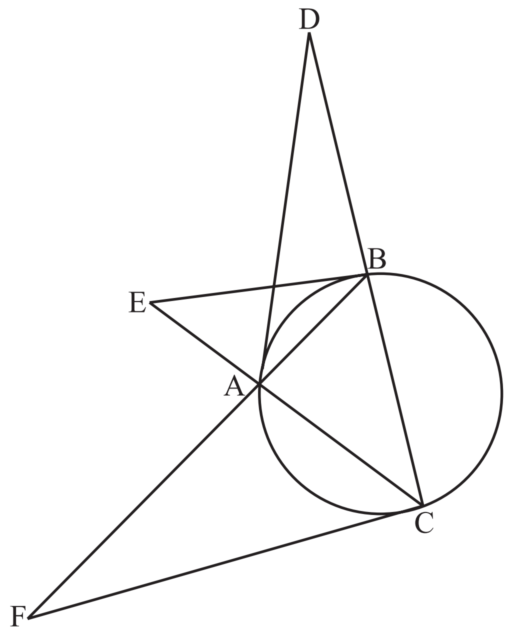
(a) Écrivez l'équation de l. *[1 point]*

(b) Une parabole a pour équation $y^2 = 2x$. La droite l coupe la parabole en U et V. Le milieu de [UV] est noté W.

(i) Montrer que les coordonnées de W sont $\left(1+\frac{1}{m^2} ; \frac{1}{m}\right)$.

(ii) Montrez que le lieu de W lorsque m varie est une parabole. Trouvez les coordonnées de son foyer et une équation de sa directrice. *[10 points]*

(iii)



La figure représente un triangle ABC inscrit dans un cercle. La tangente au cercle en A coupe (BC) en D, la tangente en B coupe (CA) en E et la tangente en C coupe (AB) en F.

(a) Montrez que $\frac{\text{BD}}{\text{DC}} \times \frac{\text{CE}}{\text{EA}} \times \frac{\text{AF}}{\text{FB}} = -1$. *[9 points]*

(b) Énoncez brièvement, en la justifiant, quelle conclusion peut être tirée de ce résultat. *[1 point]*