IB DIPLOMA PROGRAMME
PROGRAMME DU DIPLÔME DU BI
PROGRAMA DEL DIPLOMA DEL BI

M05/5/MATHL/HP1/FRE/TZ0/XX

22057210

MATHÉMATIQUES
NIVEAU SUPÉRIEUR
ÉPREUVE 1

Mardi 3 mai 2005 (après-midi)

2 heures

Numéro de session du candidat

0	0							

INSTRUCTIONS DESTINÉES AUX CANDIDATS

- Écrivez votre numéro de session dans la case ci-dessus.
- N'ouvrez pas cette épreuve avant d'y être autorisé.
- Répondez à toutes les questions dans les espaces prévus à cet effet.
- Sauf indication contraire dans l'intitulé de la question, les réponses numériques devront être exactes ou à trois chiffres significatifs près.

Le maximum des points sera attribué aux réponses correctes. Lorsque la réponse est fausse, certains points seront accordés si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. Si cela est nécessaire, les calculs peuvent être poursuivis en dessous de la case réservée à la réponse. Les solutions obtenues à l'aide de calculatrices à écran graphique doivent être accompagnées d'un raisonnement adéquat. Par exemple, si des graphiques sont utilisés pour trouver la solution, veuillez inclure un croquis de ces derniers dans votre réponse.

1. Les vecteurs positions des points P et Q sont $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ respectivement. L'origine est en O.

Déterminez

(a) la mesure de l'angle POQ ;

(b) l'aire du triangle OPQ.

Résolution :

Réponses :

(a) ________________

(b) ________________

2. Résolvez l'équation $\left| e^{2x} - \frac{1}{x+2} \right| = 2$.

Résolution :

Réponse :

____

3. Le tableau ci-dessous montre la distribution des probabilités d'une variable aléatoire discrète X.

x	0	1	2	3
$\mathrm{P}(X=x)$	0,2	a	b	0,25

(a) Étant donné que $\mathrm{E}(X) = 1{,}55$, trouvez la valeur de a et celle de b.

(b) Calculez $\mathrm{Var}(X)$.

Résolution :

Réponses :

(a) ____________________

(b) ____________________

4. Étant donné que $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$, trouvez $\boldsymbol{X}$ tel que $\boldsymbol{BX} = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{AB}$.

Résolution :

Réponse :

....

5. On considère les 10 valeurs $x_1, x_2, \ldots x_{10}$. Étant donné que $\sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 1341$ et que l'écart-type est $6{,}9$, trouvez la valeur de $\bar{x}$.

Résolution :

Réponse :

....

6. La fonction f est définie par $f(x) = \dfrac{x^5 + 2}{x}$, $x \neq 0$. Il y a un point d'inflexion au point P sur la courbe représentant f. Trouvez les coordonnées de P.

Résolution :

Réponse :

7. Soit $P(z) = z^3 + az^2 + bz + c$, avec a, b et $c \in \mathbb{R}$. Deux des racines de $P(z) = 0$ sont -2 et $(-3+2\mathrm{i})$.

Trouvez la valeur de a, celle de b et celle de c.

Résolution :

Réponse :

8. Pour participer à un débat, une équipe de cinq étudiants doit être choisie au hasard. L'équipe doit être choisie dans un groupe de huit étudiants en médecine et de trois étudiants en droit. Trouvez la probabilité pour que

(a) seulement des étudiants en médecine soient choisis ;

(b) les étudiants en droit soient tous les trois choisis.

Résolution :

Réponses :

(a)

(b)

9. La fonction de densité de probabilité $f(x)$ d'une variable aléatoire continue X est définie sur l'intervalle [0 ; a] par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{8}x & \text{pour } 0 \leq x \leq 3, \\ \dfrac{27}{8x^2} & \text{pour } 3 < x \leq a. \end{cases}$$

Trouvez la valeur de a.

Résolution :

Réponse :

10. Étant donné que $a \sin 4x + b \sin 2x = 0$, avec $0 < x < \frac{\pi}{2}$, trouvez une expression de $\cos^2 x$ en fonction de *a* et *b*.

Résolution :

Réponse :

11. Étant donné que $|z| = 2\sqrt{5}$, trouvez le nombre complexe *z* qui satisfait l'équation

$$\frac{25}{z} - \frac{15}{z^*} = 1 - 8\mathrm{i}\,.$$

Résolution :

Réponse :

12. (a) Décomposez en fractions (éléments) simples $\frac{2x+4}{(x^2+4)(x-2)}$.

(b) À partir de là, ou par toute autre méthode, trouvez $\int \frac{2x+4}{(x^2+4)(x-2)}\,\mathrm{d}x$.

Résolution :

Réponses :

(a) ____________________

(b) ____________________

13. On procède à une expérience au cours de laquelle le nombre n de bactéries dans un liquide est donné par la relation $n = 650\,\mathrm{e}^{kt}$, dans laquelle t est le temps en minutes depuis le début de l'expérience et k est une constante. Le nombre de bactéries double toutes les 20 minutes. Trouvez

(a) la valeur **exacte** de k ;

(b) le taux d'accroissement du nombre de bactéries lorsque $t = 90$.

Résolution :

Réponses :

(a) ______________________

(b) ______________________

14. Soit $f(x) = \dfrac{x^2 + 5x + 5}{x + 2}, x \neq -2$.

(a) Trouvez $f'(x)$.

(b) Résolvez $f'(x) > 2$.

Résolution :

Réponses :

(a) ______________________

(b) ______________________

15. La normale à la courbe d'équation $y = \frac{k}{x} + \ln x^2$, avec $x \neq 0$, $k \in \mathbb{R}$, au point d'abscisse $x = 2$, a pour équation $3x + 2y = b$, avec $b \in \mathbb{R}$. Trouvez la valeur **exacte** de *k*.

Résolution :

Réponse :

16. Étant donné que $(A \cup B)' = \varnothing$, $\mathrm{P}\left(A' \middle| B\right) = \dfrac{1}{3}$ et $\mathrm{P}(A) = \dfrac{6}{7}$, trouvez $\mathrm{P}(B)$.

Résolution :

Réponse :

17. Le triangle ABC a un angle obtus en B, $\mathrm{BC} = 10{,}2$, $\hat{\mathrm{A}} = x$ et $\hat{\mathrm{B}} = 2x$.

(a) Trouvez AC, en fonction de $\cos x$.

(b) Étant donné que l'aire du triangle ABC est $52{,}02\cos x$, trouvez l'angle C.

Résolution :

Réponses :

(a)

(b)

18. La somme des n premiers termes d'une suite arithmétique $\{u_n\}$ est donnée par la formule $S_n = 4n^2 - 2n$. Trois termes de cette suite, u_2, u_m et u_{32}, sont les termes consécutifs d'une suite géométrique. Déterminez m.

Résolution :

Réponse :

19. La fonction f est définie pour $x > 2$ par $f(x) = \ln x + \ln(x-2) - \ln(x^2-4)$.

(a) Exprimez $f(x)$ sous la forme $\ln\left(\dfrac{x}{x+a}\right)$.

(b) Trouvez une expression de $f^{-1}(x)$.

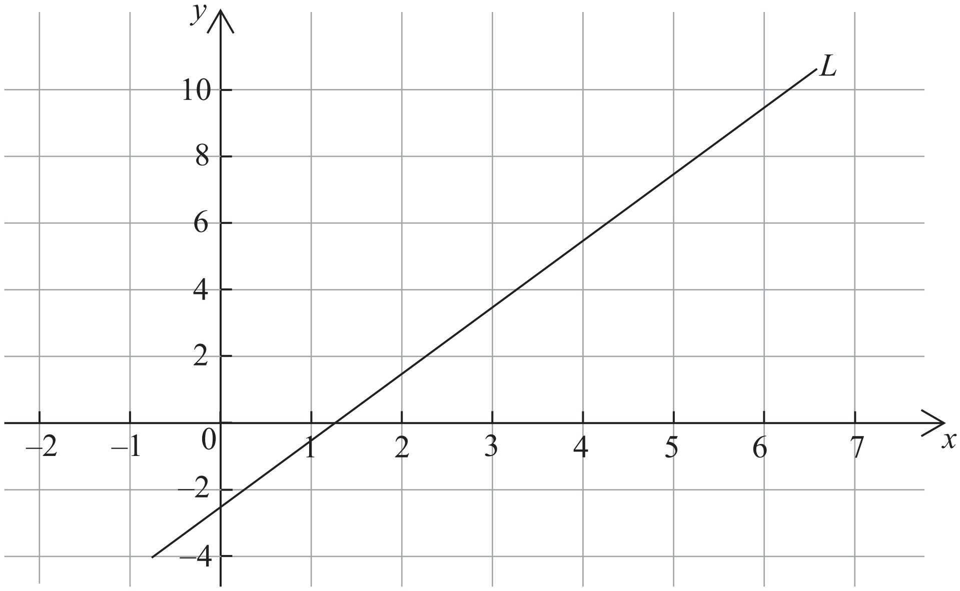
Résolution :

Réponses :

(a) ______________________

(b) ______________________

20. Soit $y = \log_3 z$, où z est une fonction de x. La figure montre la droite L, qui représente la courbe de y en fonction de x.



(a) En utilisant la courbe, ou par tout autre moyen, estimez la valeur de x lorsque $z = 9$.

(b) La droite L passe par le point $\left(1\,;\log_3 \dfrac{5}{9}\right)$. Sa pente est 2. Trouvez une expression de z en fonction de x.

Résolution :

Réponses :

(a) ____________

(b) ____________