MATEMÁTICAS
NIVEL SUPERIOR
PRUEBA 2

Miércoles 5 de noviembre de 2003 (mañana)

3 horas

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste las cinco preguntas de la Sección A y una pregunta de la Sección B.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o con tres cifras significativas.
- Escriba la marca y el modelo de su calculadora en la portada de su cuadernillo de respuestas (p. ej., Casio *fx-9750G*, Sharp EL-9600, Texas Instruments TI-85).

Empiece una página nueva para cada respuesta. Se recomienda que muestre todos los cálculos, siempre que sea posible. Para los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el proceso seguido hasta su obtención. Por ejemplo, cuando deba utilizar gráficas de una calculadora de pantalla gráfica para hallar soluciones, deberá dibujar esas gráficas en su respuesta. Una respuesta incorrecta sin indicación del método utilizado no recibirá normalmente ***ningún*** *punto.*

SECCIÓN A

Conteste las ***cinco*** *preguntas de esta sección.*

1. *[Puntuación máxima: 12]*

La recta L pasa por el punto $\mathrm{A}(2, 5, -1)$ y es perpendicular al plano de ecuación $x + y + z - 1 = 0$.

(a) Halle la ecuación cartesiana de la recta L. *[2 puntos]*

(b) Halle el punto de intersección de la recta L y el plano. *[4 puntos]*

(c) Halle las coordenadas del punto simétrico de A respecto al plano. *[2 puntos]*

(d) Calcule la distancia del punto $\mathrm{B}(2, 0, 6)$ a la recta L. *[4 puntos]*

2. *[Puntuación máxima: 16]*

(a) Demuestre por inducción matemática el teorema de De Moivre

$$(\cos\theta + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\theta)^n = \cos(n\theta) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(n\theta),\ n \in \mathbb{Z}^+.$$ *[7 puntos]*

(b) Sea $z^5 - 32 = 0$.

(i) Compruebe que $z_1 = 2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right)$ es una de las raíces complejas de esta ecuación.

(ii) Calcule $z_1^2, z_1^3, z_1^4, z_1^5$, expresando las respuestas en términos de módulos y argumentos.

(iii) Represente en el plano complejo los puntos definidos por z_1, z_1^2, z_1^3, z_1^4 y z_1^5.

(iv) El punto z_1^n se aplica en el punto z_1^{n+1} por medio de una composición de dos transformaciones lineales, con $n = 1, 2, 3, 4$. Dé una descripción geométrica completa de cada una de ellas. *[9 puntos]*

3. *[Puntuación máxima: 15]*

(i) (a) Exprese $\sqrt{3}\cos\theta - \mathrm{sen}\,\theta$ en la forma $r\cos(\theta + \alpha)$, con $r > 0$ y $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, dando los valores **exactos** de r y α. *[3 puntos]*

(b) A partir de lo anterior, o de cualquier otro modo, con $0 \le \theta \le 2\pi$, halle el conjunto de valores de $\sqrt{3}\cos\theta - \mathrm{sen}\,\theta$. *[2 puntos]*

(c) Resuelva $\sqrt{3}\cos\theta - \mathrm{sen}\,\theta = -1$, con $0 \le \theta \le 2\pi$, expresando el valor **exacto** de los resultados. *[5 puntos]*

(ii) Demuestre que $\dfrac{\mathrm{sen}\,4\theta(1-\cos 2\theta)}{\cos 2\theta(1-\cos 4\theta)} = \tan\theta$, con $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, y $\theta \ne \frac{\pi}{4}$. *[5 puntos]*

4. *[Puntuación máxima: 14]*

(i) Compruebe, mediante la sustitución $y = xv$ que la solución general de la ecuación diferencial $(x^2 + y^2) + 2xy\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$, $x > 0$ es

$$x^3 + 3xy^2 = k, \text{ donde } k \text{ es una constante.}$$ *[6 puntos]*

(ii) La ecuación de una curva es $f(x) = \dfrac{a}{b + \mathrm{e}^{-cx}}$, $a \neq 0, b > 0, c > 0$.

(a) Compruebe que $f''(x) = \dfrac{ac^2\mathrm{e}^{-cx}\left(\mathrm{e}^{-cx} - b\right)}{\left(b + \mathrm{e}^{-cx}\right)^3}$. *[4 puntos]*

(b) Halle las coordenadas del punto de la curva donde $f''(x) = 0$. *[2 puntos]*

(c) Compruebe que el anterior es un punto de inflexión. *[2 puntos]*

5. *[Puntuación máxima: 13]*

(i) Una variable aleatoria X está normalmente distribuida con media μ y desviación típica σ de modo que $\mathrm{P}(X > 50{,}32) = 0{,}119$ y $\mathrm{P}(X < 43{,}56) = 0{,}305$.

(a) Calcule μ y σ. *[5 puntos]*

(b) A partir de lo anterior halle $\mathrm{P}\left(\left| X - \mu \right| < 5\right)$. *[2 puntos]*

(ii) Considere el siguiente sistema de ecuaciones donde b es una constante.

$$\begin{aligned} 3x + y + z &= 1 \\ 2x + y - z &= 4 \\ 5x + y + bz &= 1 \end{aligned}$$

(a) Resuelva el sistema para z en función de b. *[4 puntos]*

(b) A partir de lo anterior, escriba los valores de b para el cual el sistema tiene solución única, razonando la respuesta. *[2 puntos]*

SECCIÓN B

*Conteste **una** pregunta de esta sección.*

Estadística

6. *[Puntuación máxima: 30]*

(i) La variable aleatoria X tiene una distribución de Poisson de media λ.

(a) Suponiendo que $\mathrm{P}(X=4)=\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)$, calcule el valor de λ. *[3 puntos]*

(b) Suponiendo que $\lambda = 3{,}2$ halle el valor de

(i) $\mathrm{P}(X \geq 2)$;

(ii) $\mathrm{P}\left(X \leq 3 \mid X \geq 2\right)$. *[5 puntos]*

(ii) Un estadístico clínico estudia los pesos, x kg, de los recién nacidos en un hospital. Averigua que, en un mes, han nacido 15 bebés.
Para ellos $\sum x = 55{,}5$ y $\sum x^2 = 215{,}8$.
Suponiendo que los pesos están normalmente distribuidos, calcule un intervalo de confianza del 99 % para el peso medio de los recién nacidos en este hospital. *[5 puntos]*

(iii) Un agricultor cultiva tomates utilizando dos variedades de plantas, I y II. Piensa que el rendimiento medio de las plantas de la variedad II es mayor que el de las plantas de la variedad I y anota el rendimiento de cada una de ellas obteniendo los siguientes resultados.

Variedad	I	II
Número de plantas	150	100
Rendimiento medio (kg)	3,51	3,56
Desviación típica del rendimiento (kg)	0,21	0,23

Se supone que las dos muestras han sido extraídas de poblaciones normales con la misma varianza. Determine, al nivel de significación del 5 % si estos resultados responden o no a las expectativas del agricultor. *[7 puntos]*

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 6: continuación)

(iv) Una granja vende huevos en cajas de seis. Los huevos pueden ser morenos o blancos. El propietario cree que el número de huevos morenos en cada caja se puede ajustar mediante una distribución binomial. Revisa 100 cajas y obtiene los siguientes resultados.

Número de huevos morenos por caja	Frecuencia
0	10
1	29
2	31
3	18
4	8
5	3
6	1

(a) (i) Calcule el número medio de huevos morenos por caja.

(ii) A partir de lo anterior, calcule la probabilidad estimada, p, de que un huevo elegido al azar sea moreno. *[2 puntos]*

(b) Calcule un estadístico χ^2 apropiado y compruebe, al nivel de significación del $5\,\%$ si la distribución binomial representa o no un buen ajuste para estos datos. *[8 puntos]*

Conjuntos, relaciones y grupos

7. *[Puntuación máxima: 30]*

(i) (a) Compruebe, mediante un diagrama de Venn, que $(A \cup B)' = A' \cap B'$. *[2 puntos]*

(b) Demuestre que $\left[(A' \cup B) \cap (A \cup B')\right]' = (A \cap B)' \cap (A \cup B)$. *[4 puntos]*

(ii) Sea $S = \{f, g, h, j\}$ el conjunto de las funciones definidas por

$$f(x) = x,\ g(x) = -x,\ h(x) = \frac{1}{x},\ j(x) = -\frac{1}{x},\ \text{con } x \neq 0.$$

(a) Construya la tabla de la operación del grupo $\{S, \circ\}$, donde $\circ$ es la composición de funciones. *[3 puntos]*

(b) A continuación se muestran las tablas de las operaciones de los grupos $\{0, 1, 2, 3\}$ para la adición módulo 4, y $\{1, 2, 3, 4\}$ para la multiplicación módulo 5.

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

×	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

Comparando los elementos de las dos tablas dadas junto con la tabla construida en el apartado (a), determine qué grupos son isomorfos. Razone la respuesta y indique claramente los elementos homólogos. *[6 puntos]*

(iii) (a) Se define la operación binaria # en el conjunto de los números reales mediante

$$a \# b = a + b + 1.$$

Compruebe que la operación binaria # es conmutativa y asociativa. *[4 puntos]*

(b) Compruebe que el conjunto de los números reales es un grupo para la operación #. *[4 puntos]*

(iv) (a) Determine, razonando la respuesta, cuáles de las siguientes funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ son biyectivas.

$$p(x) = x^2 + 1,\ q(x) = x^3,\ r(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 + 2}$$ *[4 puntos]*

(b) Sea t una función del conjunto A en el conjunto B, y sea s una función del conjunto B en el C. Compruebe que si s y t son ambas biyectivas, entonces $s \circ t$ también lo es. *[3 puntos]*

Matemáticas discretas

8. *[Puntuación máxima: 30]*

(i) (a) Se define en $\mathbb{Z}$ la relación R en la forma aRb si $a \equiv b (\bmod m)$ donde $m \in \mathbb{Z}^+$. Compruebe que R es una relación de equivalencia. *[5 puntos]*

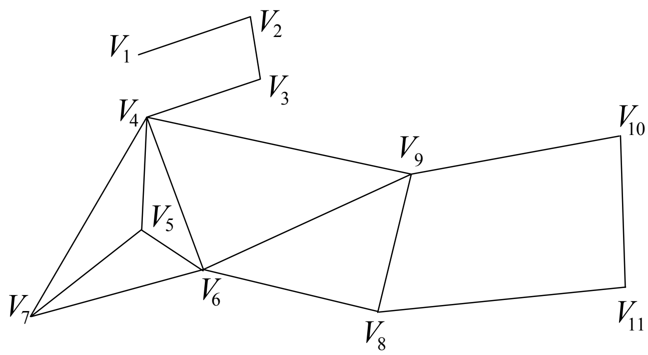
(b) (i) Si $k, (0 \le k < 8)$ es una solución de la congruencia $5x \equiv 3$ (mod 8), halle el valor de k.

(ii) Compruebe que todas las soluciones de $5x \equiv 3$ (mod 8) son congruentes con k. *[5 puntos]*

(ii) Resuelva la relación de recurrencia

$$u_n = 3u_{n-1} + 4u_{n-2}\ ;\ u_1 = 1, u_2 = 2\,.$$ *[7 puntos]*

(iii) Considere el grafo G de vértices $V_1, V_2, V_3, ... V_{11}$ que se muestra en la figura dada a continuación.



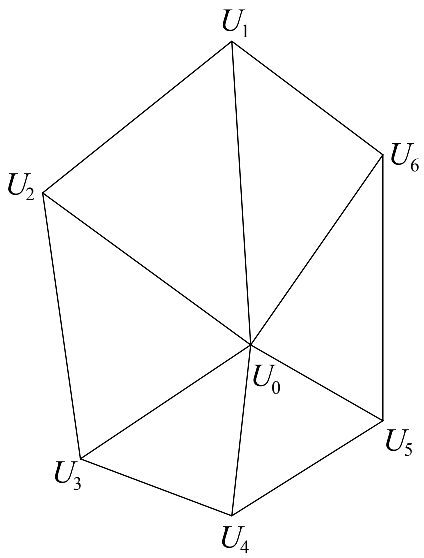
(a) Halle el número cromático de G, justificando la respuesta. *[4 puntos]*

(b) Halle el número de caminos Hamiltonianos diferentes definidos entre V_1 y V_{11} e indique la secuencia de vértices de cada uno. *[3 puntos]*

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 8: continuación)

(iv) Sea el grafo K de vértices $U_0, U_1, U_2, ...U_6$.



(a) Comenzando en U_0, lleve a cabo una búsqueda en amplitud en el grafo K para obtener un árbol generador. Dibuje el árbol correspondiente a cada etapa de la búsqueda T_r para $r = 1$ hasta 6.

(b) Comenzando en U_0, lleve a cabo una búsqueda en profundidad en el grafo K para obtener un árbol generador. Dibuje el árbol correspondiente a cada etapa de la búsqueda T_r para $r = 1$ hasta 6. *[6 puntos]*

Aproximación y análisis

9. *[Puntuación máxima: 30]*

(i) (a) Dada la curva $f(x) = x \operatorname{sen} x$, para $0 \le x \le 2\pi$.

(i) Represente de forma aproximada la gráfica de $y = f(x)$.

(ii) Calcule la menor raíz positiva de la ecuación $f(x) = 0$, expresando el valor **exacto** del resultado.

(iii) Utilizando el método de Newton-Raphson para el cálculo de la raíz de $f(x) = 0$, compruebe que

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 \cos x_n}{x_n \cos x_n + \operatorname{sen} x_n}.$$ *[6 puntos]*

(b) Halle el área encerrada por la curva $y = x \operatorname{sen} x$, y la recta $y = 0$, con $0 \le x \le \pi$. Exprese el resultado con **seis** cifras decimales. *[2 puntos]*

(c) Si hubiese que calcular el área del apartado (b) utilizando la regla del trapecio con 10 intervalos, halle un límite superior para el error en el cálculo del área. (No debe calcular el área utilizando la regla del trapecio, sólo ha de hallar el límite superior para el error implicado en ese cálculo). *[6 puntos]*

(ii) (a) Describa cómo ha de utilizarse el criterio integral para comprobar que una serie es convergente. Enuncie claramente todas las condiciones necesarias. *[3 puntos]*

(b) Compruebe si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^{n^2}}$ es convergente. *[5 puntos]*

(iii) (a) Halle los cuatro primeros términos no nulos de la serie de Maclaurin para

(i) $\operatorname{sen} x$;

(ii) e^{x^2}. *[4 puntos]*

(b) A partir de lo anterior, calcule la serie de Maclaurin para $e^{x^2} \operatorname{sen} x$, hasta el término en x^5. *[2 puntos]*

(c) Utilice el resultado del apartado (b) para calcular $\lim_{x \to 0} \left(\frac{e^{x^2} \operatorname{sen} x - x}{x^3} \right)$. *[2 puntos]*

Geometría euclídea y secciones cónicas

10. *[Puntuación máxima: 30]*

(i) En un ΔABC, D y E son los puntos de los lados [BC] y [CA] tales que DC = 2BD y EA = 2CE. Si las rectas (DE) y (AB) se cortan en el punto F, demostrar que AB = 3BF. *[4 puntos]*

(ii) (a) En un ΔABC, sea D el punto medio del segmento [BC] y sea [AD] una mediana. Demostrar el teorema de Apolonio, o sea que

$$AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2).$$ *[5 puntos]*

(b) En un cuadrilátero ABCD, X e Y son los puntos medios de [AC] y [BD], respectivamente. Demostrar que

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4XY^2.$$ *[6 puntos]*

(iii) Sean F_1 y F_2 los focos de la elipse de ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ a > b.$$

Sea P un punto de la elipse de coordenadas (x_0, y_0) con $x_0, y_0 > 0$.

(a) Compruebe que la ecuación de la tangente a la elipse en el punto P viene dada por

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$ *[5 puntos]*

(b) La tangente en P corta al eje x en el punto M. Halle las coordenadas del punto M. *[2 puntos]*

(c) Calcule las longitudes de PF_1, PF_2, MF_1 y MF_2. *[4 puntos]*

(d) Utilice el recíproco del teorema de la bisectriz para demostrar que [PM] es la bisectriz exterior de $F_2\hat{P}F_1$. *[4 puntos]*