MATEMÁTICAS
NIVEL SUPERIOR
PRUEBA 1

Número del alumno

Martes 4 de noviembre de 2003 (tarde)

2 horas

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- Escriba su número de alumno en la casilla de arriba.
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste todas las preguntas en los espacios provistos.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o con tres cifras significativas.
- Escriba la marca y el modelo de su calculadora en el cuadro correspondiente de la portada del examen (p. ej., Casio *fx-9750G*, Sharp EL-9600, Texas Instruments TI-85).

Se otorgará la máxima puntuación a las respuestas correctas. Cuando la respuesta sea incorrecta se otorgarán algunos puntos siempre que aparezca el método empleado y éste sea correcto. Donde sea necesario, puede utilizar para sus cálculos el espacio que queda debajo del cuadro. Para los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el proceso seguido hasta su obtención. Por ejemplo, cuando deba utilizar gráficas de una calculadora de pantalla gráfica para hallar soluciones, deberá dibujar esas gráficas en su respuesta.

1. Considere los puntos $\mathrm{A}(1, 2, -4)$, $\mathrm{B}(1, 5, 0)$ y $\mathrm{C}(6, 5, -12)$. Halle el área de $\Delta\mathrm{ABC}$.

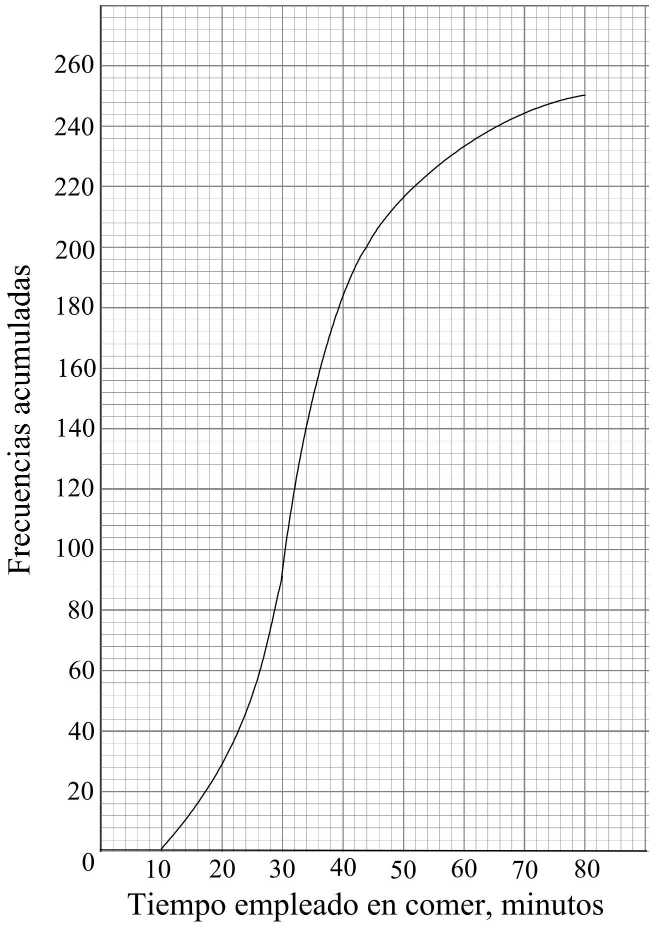
Operaciones:

Respuesta:

2. La curva de frecuencias acumuladas que se muestra a continuación indica el tiempo que emplean en comer 250 estudiantes.

(a) Estime el número de estudiantes que emplean entre 20 y 40 minutos en comer.

(b) Si un 20 % de los estudiantes emplea más de x minutos en comer, estime el valor de x.



Operaciones:

Respuestas:

(a) ______________________

(b) ______________________

3. Las matrices $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ y $\boldsymbol{X}$ son todas matrices 3×3 no singulares.

Suponiendo que $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$, exprese $\boldsymbol{X}$ en función de las otras matrices.

Operaciones:

Respuesta:

....

4. Una variable aleatoria continua, X, tiene una función de densidad de probabilidad

$$f(x) = \operatorname{sen} x,\ \ 0 \le x \le \frac{\pi}{2}.$$

Halle la mediana de X.

Operaciones:

Respuesta:

....

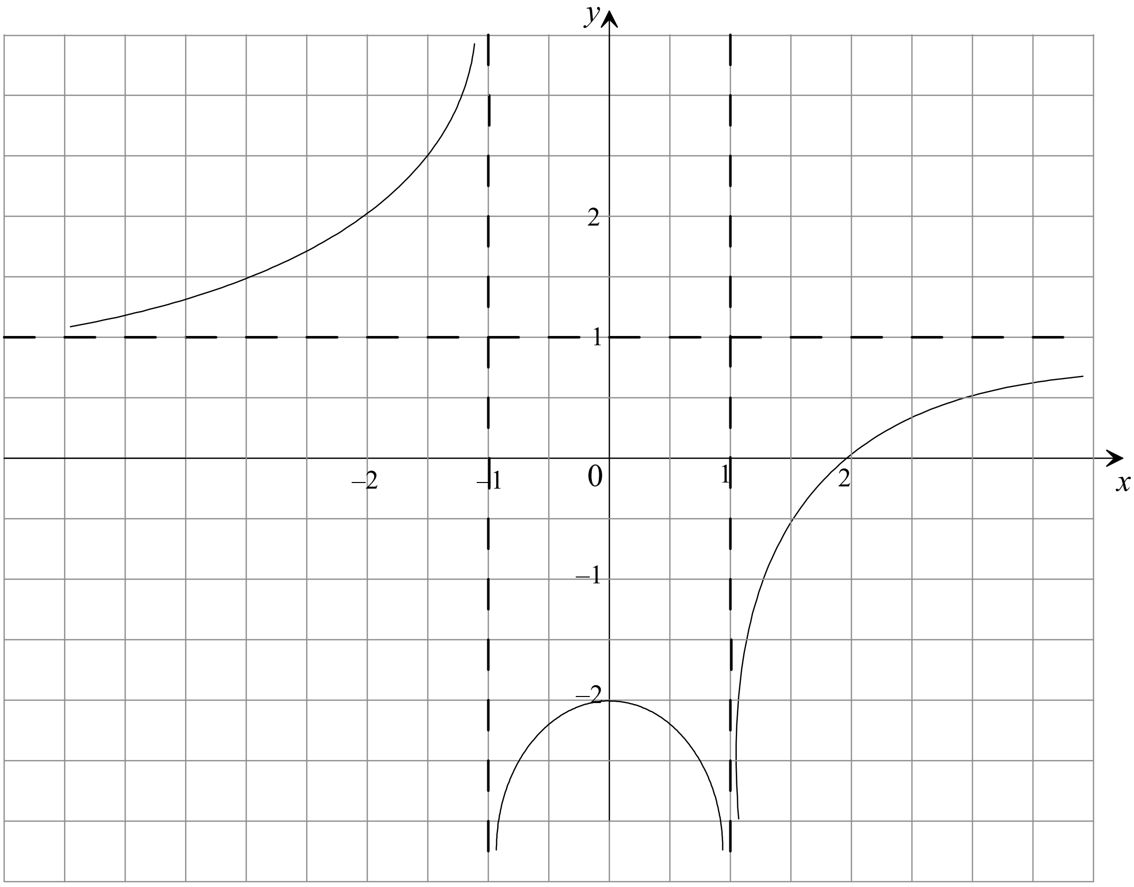
5. Considere la ecuación $2(p+\mathrm{i}q)=q-\mathrm{i}p-2(1-\mathrm{i})$, donde p y q son ambos números reales. Halle p y q.

Operaciones:

Respuestas:

6. En el diagrama aparece la gráfica de $f(x)$.

(a) Sobre el mismo diagrama dibuje aproximadamente la gráfica de $\dfrac{1}{f(x)}$, indicando claramente todas las asíntotas.



(b) Sobre el mismo diagrama, escriba las coordenadas del máximo local, el mínimo local y las intersecciones con el eje x y con el eje y de $\dfrac{1}{f(x)}$.

Operaciones:

7. Halle el ángulo formado por el plano $3x - 2y + 4z = 12$ y el eje z. Dé su respuesta al grado más próximo.

Operaciones:

Respuesta:

8. Dada la función $f(t) = 3\sec^2 t + 5t$

(a) halle $f'(t)$;

(b) halle los valores **exactos** de

(i) $f(\pi)$;

(ii) $f'(\pi)$.

Operaciones:

Respuestas:

(a) ______________________

(b)(i) ______________________

(ii) ______________________

9. Los cuatro primeros términos de una sucesión aritmética son $2, a-b, 2a+b+7$ y $a-3b$, donde a y b son constantes. Halle a y b.

Operaciones:

Respuestas:

____

10. Resuelva $\log_{16} \sqrt[3]{100 - x^2} = \frac{1}{2}$.

Operaciones:

Respuesta:

11. Calcule el área encerrada por las curvas $y = \ln x$ e $y = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}$, $x > 0$.

Operaciones:

Respuesta:

12. En un canal de televisión emiten las noticias a la misma hora todos los días. La probabilidad de que Alicia vea las noticias un día determinado es 0,4. Calcule la probabilidad de que en cinco días consecutivos, vea las noticias tres días como máximo.

Operaciones:

Respuesta:

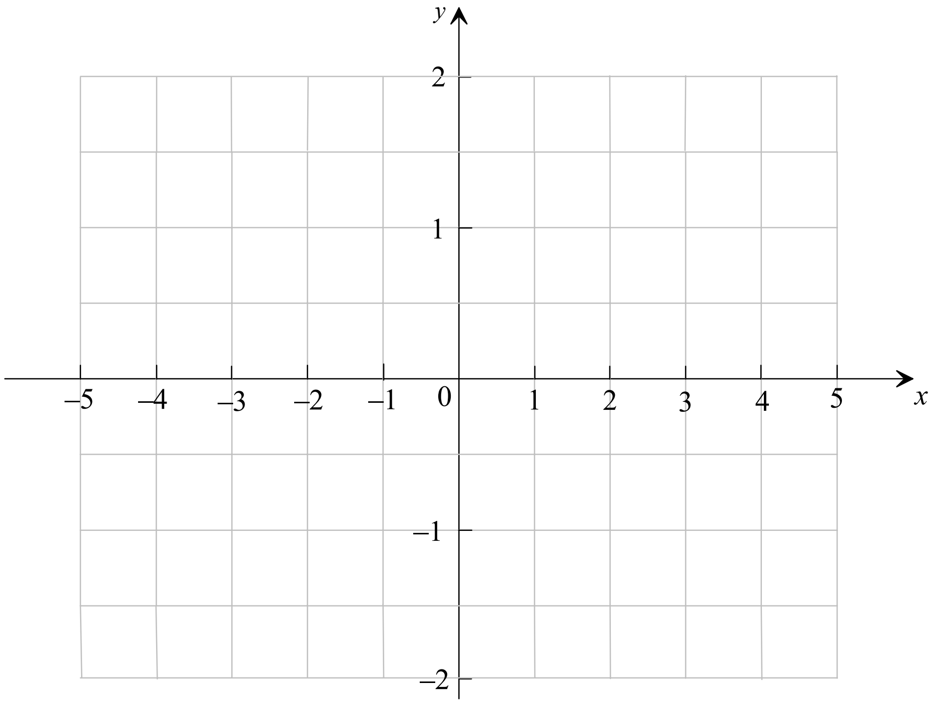
13. Considere la ecuación $(1+2k)x^2 - 10x + k - 2 = 0,\ k \in \mathbb{R}$. Halle el conjunto de valores de k para los cuales la ecuación tiene raices reales.

Operaciones:

Respuesta:

14. Sea $f(x) = \text{sen}\left(\text{arcsen}\dfrac{x}{4} - \text{arccos}\dfrac{3}{5}\right)$, para $-4 \le x \le 4$.

(a) En la siguiente cuadrícula, dibuje de forma aproximada la gráfica de $f(x)$.



(b) En la gráfica, indique claramente las coordenadas de los puntos de corte con el eje x y con el eje y, el mínimo y los extremos de la curva $f(x)$.

(c) Resuelva $f(x) = -\dfrac{1}{2}$.

Operaciones:

Respuesta:

(c) ______________________

15. Considere la ecuación $2xy^2 = x^2y + 3$.

(a) Halle y cuando $x = 1$ e $y < 0$.

(b) Halle $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ cuando $x = 1$ e $y < 0$.

Operaciones:

Respuestas:

(a) ____________________

(b) ____________________

16. Sea $y = \mathrm{e}^{3x}\operatorname{sen}(\pi x)$.

(a) Halle $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

(b) Halle el menor valor positivo de x para el cual $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$.

Operaciones:

Respuestas:

(a) ____________________

(b) ____________________

17. Sea $f(x) = \dfrac{x+4}{x+1}, x \neq -1$ y $g(x) = \dfrac{x-2}{x-4}, x \neq 4$.

Halle el conjunto de valores de x para los cuales $f(x) \leq g(x)$.

Operaciones:

Respuesta:

....

18. De un grupo de 8 alumnos se eligen 4 para formar un comité. Los dos alumnos de mayor edad no pueden ser elegidos simultáneamente. Calcular de cuántas maneras se puede formar el comité.

Operaciones:

Respuesta:

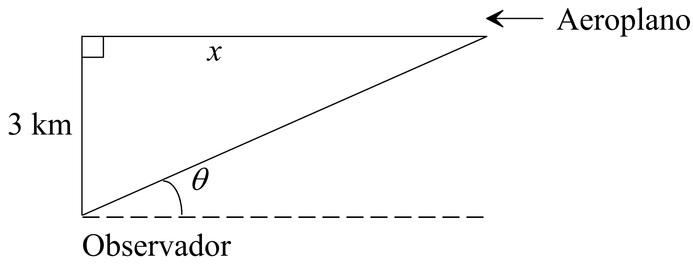
....

19. Resuelva $2\left(5^{x+1}\right)=1+\frac{3}{5^{x}}$, expresando la respuesta en la forma $a+\log_{5} b$, con $a, b \in \mathbb{Z}$.

Operaciones:

Respuesta:

20. Un aeroplano vuela en linea recta y a velocidad constante, manteniendo una altitud constante de 3 km, con un rumbo que le lleva directamente sobre la vertical de un observador que se encuentra en tierra. En un instante dado, el ángulo θ de la visual del observador al aeroplano es $\frac{1}{3}\pi$ radianes y se va incrementando en $\frac{1}{60}$ radianes por segundo. Halle la velocidad, en kilómetros por hora, a la cual el aeroplano avanza hacia el observador.



Operaciones:

Respuesta:

....