IB DIPLOMA PROGRAMME
PROGRAMME DU DIPLÔME DU BI
PROGRAMA DEL DIPLOMA DEL BI

MATEMÁTICAS
NIVEL SUPERIOR
PRUEBA 2

Martes 6 de mayo de 2003 (mañana)

3 horas

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste las cinco preguntas de la Sección A y una pregunta de la Sección B.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o con tres cifras significativas.
- Escriba la marca y el modelo de su calculadora en el cuadro correspondiente de la portada del examen (p. ej., Casio fx-9750G, Sharp EL-9600, Texas Instruments TI-85).

Empiece una página nueva para cada respuesta. Se recomienda que muestre todos los cálculos, siempre que sea posible. Cuando la respuesta sea incorrecta se otorgarán algunos puntos siempre que aparezca el método empleado y éste sea correcto. Para los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el proceso seguido hasta su obtención. Por ejemplo, cuando deba utilizar gráficas de una calculadora de pantalla gráfica para hallar soluciones, deberá dibujar esas gráficas en su respuesta.

SECCIÓN A

Conteste las ***cinco*** *preguntas de esta sección.*

1. *[Puntuación máxima: 12]*

La función f está definida por $f(x)=\dfrac{x^2}{2^x}$, para $x>0$.

(a) (i) Demuestre que

$$f'(x)=\frac{2x-x^2\ln 2}{2^x}$$

(ii) Obtenga una expresión de $f''(x)$. Simplifique su respuesta en la medida de lo posible. *[5 puntos]*

(b) (i) Halle el valor **exacto** de x que satisface la ecuación $f'(x)=0$.

(ii) Demuestre que para este valor se obtiene un máximo de $f(x)$. *[4 puntos]*

(c) Halle las abscisas de los dos puntos de inflexión de la gráfica de f. *[3 puntos]*

2. *[Puntuación máxima: 16]*

(i) Las transformaciones $\boldsymbol{T}_1$, $\boldsymbol{T}_2$, $\boldsymbol{T}_3$, del plano se definen así:

$\boldsymbol{T}_1$: un giro de 180° alrededor del origen.
$\boldsymbol{T}_2$: una reflexión respecto de la recta $y = x$.
$\boldsymbol{T}_3$: un giro de 90° en sentido contrario a las agujas del reloj alrededor del origen.

(a) Escriba las matrices 2×2 que representan a $\boldsymbol{T}_1$, $\boldsymbol{T}_2$ y $\boldsymbol{T}_3$. *[3 puntos]*

(b) La transformación $\boldsymbol{T}$ se define como $\boldsymbol{T}_1$ seguida por $\boldsymbol{T}_2$ seguida por $\boldsymbol{T}_3$.

(i) Halle la matriz 2×2 que representa a $\boldsymbol{T}$.

(ii) Dé una descripción geométrica completa de la transformación $\boldsymbol{T}$. *[4 puntos]*

(ii) Las variables x, y, z satisfacen el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= k \\ 2x + y + 4z &= 6 \\ x - 4y + 5z &= 9 \end{aligned}$$

donde k es una constante.

(a) (i) Demuestre que este sistema **no** tiene una solución única.

(ii) Halle el valor de k para el cual el sistema es compatible (es decir, tiene solución). *[6 puntos]*

(b) Halle la solución general del sistema para ese valor de k. *[3 puntos]*

3. *[Puntuación máxima: 15]*

(a) Demuestre por inducción matemática que, para un entero positivo *n*,

$$(\cos\theta + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\theta)^n = \cos n\theta + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,n\theta \text{ donde } \mathrm{i}^2 = -1\,.$$ *[5 puntos]*

(b) El número complejo *z* está definido por $z = \cos\theta + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\theta$.

(i) Demuestre que $\frac{1}{z} = \cos(-\theta) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(-\theta)$.

(ii) Demuestre que a partir de lo anterior, se puede deducir que $z^n + z^{-n} = 2\cos n\theta$. *[5 puntos]*

(c) (i) Halle el desarrollo de $(z + z^{-1})^5$, según el teorema del binomio.

(ii) A partir de ello, demuestre que $\cos^5\theta = \frac{1}{16}(a\cos 5\theta + b\cos 3\theta + c\cos\theta)$,

donde *a*, *b* y *c* son enteros positivos a hallar. *[5 puntos]*

4. *[Puntuación máxima: 11]*

Un empresario pasa *X* horas por día hablando por teléfono. La función de densidad de probabilidad de *X* está dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{12}(8x - x^3), & \text{para } 0 \le x \le 2 \\ 0, & \text{en los demás casos.} \end{cases}$$

(a) (i) Escriba una integral cuyo valor sea $E(X)$.

(ii) A partir de ello calcule el valor de $E(X)$. *[3 puntos]*

(b) (i) Demuestre que la mediana, *m*, de *X* satisface la ecuación

$$m^4 - 16m^2 + 24 = 0\,.$$

(ii) A partir de ello calcule el valor de *m*. *[5 puntos]*

(c) Calcule la moda de *X*. *[3 puntos]*

5. *[Puntuación máxima: 16]*

La función *f* de dominio $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ se define como $f(x) = \cos x + \sqrt{3}\operatorname{sen} x$.

Esta función puede también expresarse de la forma $R\cos(x-\alpha)$ donde $R > 0$ y $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

(a) Halle el valor **exacto** de R y de α. *[3 puntos]*

(b) (i) Halle el recorrido de la función *f*.

(ii) Diga, dando la razón para ello, si existe o no la función inversa de *f*. *[5 puntos]*

(c) Halle el valor **exacto** de x que satisface la ecuación $f(x) = \sqrt{2}$. *[3 puntos]*

(d) Utilizando el resultado de que $\int \sec x\,\mathrm{d}x = \ln\left|\sec x + \tan x\right| + C$, donde C es una constante, demuestre que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{f(x)} = \frac{1}{2}\ln\left(3+2\sqrt{3}\right)$. *[5 puntos]*

SECCIÓN B

*Conteste **una** pregunta de esta sección.*

Estadística

6. *[Puntuación máxima: 30]*

(i) *Exprese todas las respuestas numéricas a esta parte de la pregunta con una aproximación de **dos** cifras decimales.*

Un radar registra la velocidad, v kilómetros por hora, de los automóviles en una carretera. La velocidad de estos automóviles tiene distribución normal. Los resultados correspondientes a 1000 automóviles aparecen en la tabla siguiente.

Velocidad	Número de automóviles
$40 \le v < 50$	9
$50 \le v < 60$	35
$60 \le v < 70$	93
$70 \le v < 80$	139
$80 \le v < 90$	261
$90 \le v < 100$	295
$100 \le v < 110$	131
$110 \le v < 120$	26
$120 \le v < 130$	11

(a) Calcule, para los automóviles que están en la carretera

(i) una estimación insesgada de la velocidad media;

(ii) una estimación insesgada de la varianza de la velocidad; *[4 puntos]*

(b) Calcule, para los automóviles que están en la carretera

(i) un intervalo de confianza del 95 % para la velocidad media;

(ii) un intervalo de confianza del 90 % para la velocidad media. *[4 puntos]*

(c) Explique por qué uno de los intervalos hallados en el apartado (b) es un subconjunto del otro. *[2 puntos]*

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 6: continuación)

(ii) *Exprese todas las respuestas numéricas a esta parte de la pregunta con **tres** cifras significativas.*

Dos dactilógrafos realizaron una serie de pruebas. De promedio, el Sr. Brown cometió 2,7 errores por prueba, mientras que el Sr. Smith cometió 2,5 errores por prueba. Puede suponer que el número de errores cometidos por cualquiera de los dactilógrafos tiene una distribución de Poisson.

(a) Calcule la probabilidad de que, en una prueba determinada,

(i) el Sr. Brown haya cometido **dos** errores;

(ii) el Sr. Smith haya cometido **tres** errores;

(iii) el Sr. Brown haya cometido **dos** errores y el Sr. Smith haya cometido **tres** errores. *[6 puntos]*

(b) En otra prueba, el Sr. Brown y el Sr. Smith cometieron entre ambos un total de **cinco** errores. Calcule la probabilidad de que el Sr. Brown **haya cometido menos errores** que el Sr. Smith. *[5 puntos]*

(iii) Una calculadora genera una sucesión aleatoria de dígitos. Se selecciona aleatoriamente una muestra de 200 dígitos entre los primeros 100 000 dígitos de la sucesión. En la tabla que sigue, se indica el número de veces que aparece cada uno de los dígitos en la muestra.

dígito	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
frecuencia	17	21	15	19	25	27	19	23	18	16

Se afirma que todos los dígitos tienen la misma probabilidad de aparecer en la sucesión.

(a) Contraste esta afirmación al nivel de significación del 5 % . *[7 puntos]*

(b) Explique qué se entiende por nivel de significación del 5 % . *[2 puntos]*

Conjuntos, relaciones y grupos

7. *[Puntuación máxima: 30]*

(i) El conjunto $\mathbb{R}$ de todos los números reales es un grupo para la adición $(\mathbb{R},+)$, y el conjunto $\mathbb{R}^+$ de todos los números reales positivos es un grupo para la multiplicación $(\mathbb{R}^+,\times)$. Sea *f* la aplicación de $(\mathbb{R},+)$ en $(\mathbb{R}^+,\times)$ definida por $f(x)=3^x$.

(a) Demuestre que *f* es un isomorfismo de $(\mathbb{R},+)$ en $(\mathbb{R}^+,\times)$. *[6 puntos]*

(b) Halle una expresión de f^{-1}. *[1 punto]*

(ii) Sea $G=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle|\ a,b,c \text{ y } d \in \mathbb{R}, \text{ y } ad-bc \neq 0\right\}$.

(a) Demuestre que $(G,*)$ es un grupo, donde $*$ denota multiplicación de matrices. *[6 puntos]*

(b) ¿Es este grupo abeliano? Razone su respuesta. *[3 puntos]*

Sea $(H,*)$ un subgrupo cualquiera de $(G,*)$, y sean $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{N}$ elementos cualesquiera de *G*.

Se define la relación R_H sobre *G* como sigue:

$$\boldsymbol{M}R_H\boldsymbol{N} \Leftrightarrow \text{ existe } \boldsymbol{L}\in H \text{ tal que } \boldsymbol{M}=\boldsymbol{L}*\boldsymbol{N}.$$

(c) Demuestre que R_H es una relación de equivalencia en *G*. *[5 puntos]*

Sea *K* el conjunto de todos los elementos de *G* con $ad-bc>0$.

(d) Demuestre que $(K,*)$ es un subgrupo de $(G,*)$. *[5 puntos]*

Sean $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{N}$ 2 elementos cualesquiera de *G*. Se define la relación de equivalencia R_K sobre *G* de forma análoga a la anterior, es decir

$$\boldsymbol{M}R_K\boldsymbol{N} \Leftrightarrow \text{ existe } \boldsymbol{L}\in K \text{ tal que } \boldsymbol{M}=\boldsymbol{L}*\boldsymbol{N}.$$

(e) (i) Demuestre que sólo hay dos clases de equivalencia.

(ii) Explique cómo determinar a qué clase de equivalencia pertenece un cierto elemento $\boldsymbol{M}$ de *G*. *[4 puntos]*

Matemáticas discretas

8. *[Puntuación máxima: 30]*

(i) (a) Utilice el algoritmo de Euclides para hallar enteros x e y tales que $17x+31y=1$. *[3 puntos]*

(b) Suponiendo que $17p+31q=1$, con $p, q \in \mathbb{Z}$, demuestre que $|p| \geq 11$ y $|q| \geq 6$. *[2 puntos]*

(ii) Sea $\{y_n\}$ una sucesión de números reales definida como sigue:

$y_0 = -1$, $y_{n+1} = 2y_n + 3$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$

Despeje y_n de la ecuación de recurrencia. *[6 puntos]*

(iii) Considere la siguiente matriz, $\boldsymbol{M}$.

$$\begin{array}{c} \\ \text{A} \\ \text{B} \\ \text{C} \\ \text{D} \\ \text{E} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \text{A} & \text{B} & \text{C} & \text{D} & \text{E} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

(a) Trace un grafo planar G de 5 vértices, A, B, C, D y E, de modo que $\boldsymbol{M}$ sea su matriz de adyacencia. *[7 puntos]*

(b) Indique una razón por la cual G tiene un circuito euleriano. *[3 puntos]*

(c) Halle un circuito euleriano de G. *[3 puntos]*

(d) Halle un árbol generador de G. *[2 puntos]*

(iv) Sea W el conjunto $\{a, b, c, d, f, e, g\}$.

Construya un árbol binario de búsqueda para crear un índice ordenado alfabéticamente de este conjunto, tomando el elemento c como *raíz* (es decir, comenzando por c). *[4 puntos]*

Aproximación y análisis

9. *[Puntuación máxima: 30]*

En esta pregunta, donde corresponda, exprese sus respuestas con una aproximación de ***cinco*** *cifras decimales.*

(i) (a) Sea $f(x) = \mathrm{e}^x$ y $g(x) = 1 + \cos x$, para $x \in [-3, 2]$.

(i) En el mismo diagrama, trace las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$.

(ii) Marque claramente los puntos de intersección de las curvas. *[4 puntos]*

Sea la ecuación $\mathrm{e}^x = 1 + \cos x$.

(b) Use el método de Newton-Raphson para resolver la ecuación . *[9 puntos]*

(c) (i) Use la iteración de punto fijo, con $h(x) = \mathrm{e}^x - 1 - \cos x + x$, para hallar la solución negativa de la ecuación.

(ii) Explique por qué se puede aplicar el método en este caso. *[5 puntos]*

(d) (i) Presente un ejemplo a través del cual se muestre que la iteración de punto fijo no sirve para hallar la solución positiva de la ecuación.

(ii) Explique por qué la iteración de punto fijo no sirve en ese caso. *[5 puntos]*

(ii) Para k y n enteros positivos, sean

$$u_k = \frac{1 + 2(-1)^k}{k+1} \text{ y } S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} u_k .$$

(a) Demuestre que $S_{2n} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{4k-1}{2k(2k+1)}$. *[3 puntos]*

(b) A partir de lo anterior o de otro modo, determine si la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ es o no convergente y justifique su respuesta. *[4 puntos]*

Geometría euclídea y secciones cónicas

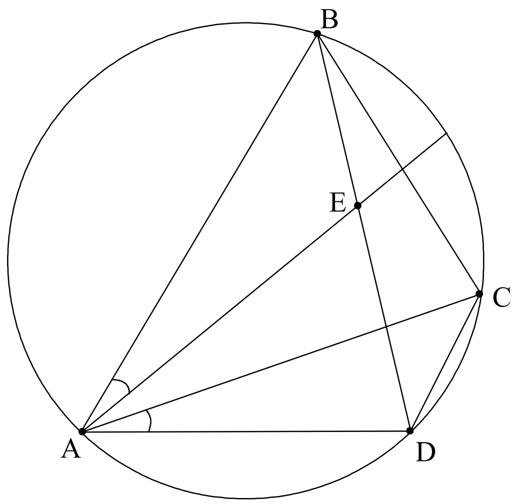
10. *[Puntuación máxima: 30]*

(i) Una sección cónica tiene la ecuación $x^2 + 4y^2 - 4x - 8y - 24 = 0$.

(a) Determine si esta cónica es una parábola, una elipse o una hipérbola. *[3 puntos]*

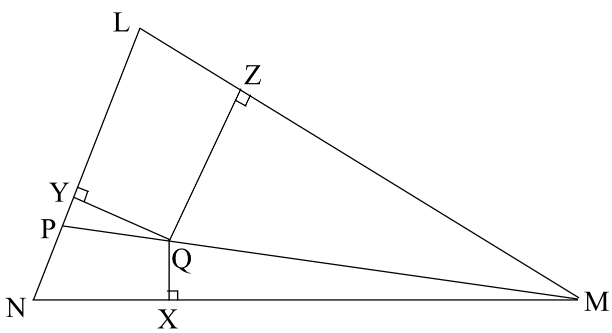
(b) Las rectas ℓ_1 y ℓ_2 son tangentes a la cónica del apartado (a), y son paralelas a la recta de ecuación $x - 2y - 12 = 0$. Halle la ecuación de ℓ_1 y de ℓ_2. *[8 puntos]*

(ii) Sea ABCD un cuadrilátero inscrito en una circunferencia. El punto E está situado sobre [BD] y es tal que $\text{B}\hat{\text{A}}\text{E} = \text{C}\hat{\text{A}}\text{D}$, como se muestra en el siguiente diagrama.



Demuestre que $\text{AC} \times \text{BD} = \text{AB} \times \text{CD} + \text{BC} \times \text{AD}$. *[10 puntos]*

(iii) Sea Q un punto en el interior de un triángulo LMN. Sean X, Y y Z los pies de las perpendiculares desde Q a [MN], [NL] y [LM] respectivamente. Sea P el punto de intersección de la recta (MQ) con el lado [LN].



Demuestre que $\text{L}\hat{\text{Q}}\text{N} = \text{L}\hat{\text{M}}\text{N} + \text{X}\hat{\text{Y}}\text{Z}$. *[9 puntos]*