



**MATEMÁTICAS**  
**NIVEL SUPERIOR**  
**PRUEBA 1**

Número del alumno

--	--	--	--	--	--	--	--

Lunes 5 de mayo de 2003 (tarde)

2 horas

---

**INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS**

- Escriba su número de alumno en la casilla de arriba.
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste todas las preguntas en los espacios provistos.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o con tres cifras significativas.
- Escriba la marca y el modelo de su calculadora en el cuadro correspondiente de la portada del examen (p. ej., Casio *fx-9750G*, Sharp EL-9600, Texas Instruments TI-85).

Se otorgará la máxima puntuación a las respuestas correctas. Cuando la respuesta sea incorrecta se otorgarán algunos puntos siempre que aparezca el método empleado y éste sea correcto. Donde sea necesario, puede utilizar para sus cálculos el espacio que queda debajo del cuadro. Para los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el proceso seguido hasta su obtención. Por ejemplo, cuando deba utilizar gráficas de una calculadora de pantalla gráfica para hallar soluciones, deberá dibujar esas gráficas en su respuesta.

1. Una sucesión geométrica tiene todos sus términos positivos. La suma de los dos primeros términos es 15 y la suma de los infinitos términos de la sucesión es 27. Halle el valor de
- (a) la razón común;
  - (b) el primer término.

<i>Operaciones:</i>	
	<i>Respuestas:</i>
	(a) _____
	(b) _____

2. Halle todos los valores de  $\theta$  en el intervalo  $[0, \pi]$  que satisfacen la ecuación

$$\cos 2\theta = \sin^2 \theta.$$

<i>Operaciones:</i>	
	<i>Respuestas:</i>
	_____
	_____

3. Dados  $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ ,  $\mathbf{b} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$  y  $\mathbf{c} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ , halle  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ .

*Operaciones:*

*Respuesta:*

4. El polinomio  $x^3 + ax^2 - 3x + b$  es divisible por  $(x - 2)$  y da de resto 6 al dividirlo por  $(x + 1)$ . Halle el valor de  $a$  y de  $b$ .

*Operaciones:*

*Respuestas:*

5. Sabiendo que  $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$  y  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , halle los valores de  $\lambda$  para los cuales  $(A - \lambda I)$  es una matriz singular.

*Operaciones:*

*Respuestas:*

6. Cuando un muchacho juega a un juego de feria, la probabilidad de que gane un premio es de 0,25. Juega al juego 10 veces. Sea  $X$  el número total de premios que gana. Suponiendo que los juegos son independientes, halle

(a)  $E(X)$ ;

(b)  $P(X \leq 2)$ .

*Operaciones:*

*Respuestas:*

(a) \_\_\_\_\_

(b) \_\_\_\_\_

7. La función  $f$  se define como  $f(x) = 2 - x^2 - e^x$ .

Escriba

- (a) el valor máximo de  $f(x)$ ;
- (b) las dos raíces de la ecuación  $f(x) = 0$ .

*Operaciones:*

*Respuestas:*

- (a) \_\_\_\_\_
- (b) \_\_\_\_\_

8. Sea el triángulo ABC,  $\hat{A} = 30^\circ$ ,  $BC = 3$  y  $AB = 5$ . Halle los dos valores posibles de  $\hat{B}$ .

*Operaciones:*

*Respuestas:*

- \_\_\_\_\_
- \_\_\_\_\_

9. Los sucesos independientes  $A$  y  $B$  son tales que  $P(A) = 0,4$  y  $P(A \cup B) = 0,88$ . Halle

(a)  $P(B)$ ;

(b) la probabilidad de que ocurra  $A$  o que ocurra  $B$ , pero **no** ambos.

*Operaciones:*

*Respuestas:*

(a) \_\_\_\_\_

(b) \_\_\_\_\_

10. Una curva tiene la ecuación  $x^3y^2 = 8$ . Halle la ecuación de la normal a la curva en el punto (2,1).

*Operaciones:*

*Respuesta:*

11. El número complejo  $z$  satisface la ecuación

$$\sqrt{z} = \frac{2}{1-i} + 1 - 4i.$$

Expresa  $z$  en la forma  $x + iy$  donde  $x, y \in \mathbb{Z}$ .

*Operaciones:*

*Respuesta:*

12. Halle el valor **exacto** de  $x$  que satisface la ecuación

$$(3^x)(4^{2x+1}) = 6^{x+2}.$$

Expresa su respuesta en la forma  $\frac{\ln a}{\ln b}$  donde  $a, b \in \mathbb{Z}$ .

*Operaciones:*

*Respuesta:*

13. Resuelva la inecuación  $|x - 2| \geq |2x + 1|$ .

*Operaciones:*

*Respuesta:*

14. La variable aleatoria  $X$  tiene distribución normal, y además

$$P(X \leq 10) = 0,670$$

$$P(X \leq 12) = 0,937.$$

Halle  $E(X)$ .

*Operaciones:*

*Respuesta:*

15. El punto A es el pie de la perpendicular trazada desde el punto  $(1, 1, 9)$  al plano  $2x + y - z = 6$ . Halle las coordenadas de A.

*Operaciones:*

*Respuesta:*

16. Una partícula se desplaza en línea recta. Su velocidad  $v \text{ ms}^{-1}$  pasados  $t$  segundos, está dada por  $v = e^{-\sqrt{t}} \text{sen } t$ .  
Halle la distancia total recorrida en el intervalo de tiempo  $[0, 2\pi]$ .

*Operaciones:*

*Respuesta:*

17. La función  $f$  está definida para  $x \leq 0$  por  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ .

Halle una expresión de  $f^{-1}(x)$ .

*Operaciones:*

*Respuesta:*

18. Por medio de la sustitución  $y = 2 - x$ , o de alguna otra manera, halle  $\int \left( \frac{x}{2-x} \right)^2 dx$ .

*Operaciones:*

*Respuesta:*

19. Una maestra va en automóvil al colegio. Durante 20 días elegidos aleatoriamente, la maestra registra el tiempo que le llevó realizar el trayecto, y halla que

$$\sum_{i=1}^{20} x_i = 626 \text{ y } \sum_{i=1}^{20} x_i^2 = 19780,8$$

donde  $x_i$  indica el tiempo, en minutos, que le llevó hacer el trayecto el  $i$ -ésimo día.

Calcule una estimación insesgada de

- (a) el tiempo medio que lleva conducir hasta la escuela;
- (b) la varianza del tiempo que lleva conducir hasta la escuela.

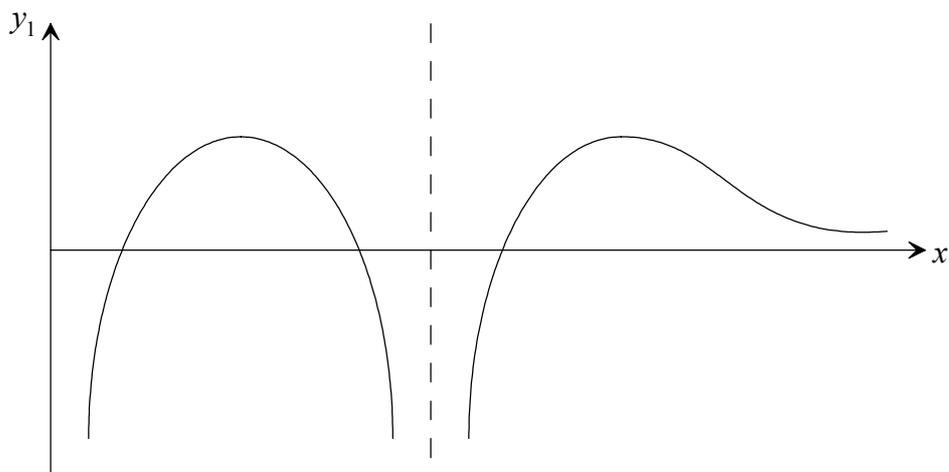
*Operaciones:*

*Respuestas:*

(a) \_\_\_\_\_

(b) \_\_\_\_\_

20. El diagrama a continuación muestra la curva  $y_1 = f(x)$ .



En los ejes a continuación, trace la gráfica de  $y_2 = |f'(x)|$ .

