MATEMÁTICAS
NIVEL SUPERIOR
PRUEBA 2

Lunes 11 de noviembre de 2002 (mañana)

3 horas

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste las cinco preguntas de la Sección A y una pregunta de la Sección B.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o con tres cifras significativas.
- Escriba la marca y el modelo de su calculadora en la portada de su cuadernillo de respuestas (p. ej., Casio *fx-9750G*, Sharp EL-9600, Texas Instruments TI-85).

Empiece una página nueva para cada respuesta. Se recomienda que muestre todos los cálculos, siempre que sea posible. Para los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el proceso seguido hasta su obtención. Por ejemplo, cuando deba utilizar gráficas de una calculadora de pantalla gráfica para hallar soluciones, deberá dibujar esas gráficas en su respuesta. Una respuesta incorrecta sin indicación del método utilizado no recibirá normalmente ***ningún*** *punto.*

SECCIÓN A

Conteste las ***cinco*** *preguntas de esta sección.*

1. *[Puntuación máxima: 16]*

(i) Una sucesión $\{u_n\}$ está dada por $u_0 = 1, u_1 = 2, u_{n+1} = 3u_n - 2u_{n-1}$ donde $n \in \mathbb{Z}^+$.

(a) Halle u_2, u_3, u_4. *[3 puntos]*

(b) (i) Exprese u_n en función de *n*.

(ii) Verifique que su respuesta a la parte (b)(i) satisface la ecuación $u_{n+1} = 3u_n - 2u_{n-1}$. *[3 puntos]*

(ii) La matriz $\boldsymbol{M}$ se define como $\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Halle $\boldsymbol{M}^2$, $\boldsymbol{M}^3$ y $\boldsymbol{M}^4$. *[3 puntos]*

(b) (i) Enuncie una conjetura acerca de $\boldsymbol{M}^n$, es decir, exprese $\boldsymbol{M}^n$ en función de n, donde $n \in \mathbb{Z}^+$.

(ii) Demuestre esta conjetura por inducción matemática. *[7 puntos]*

2. *[Puntuación máxima: 11]*

Sea el número complejo $z = \dfrac{\left(\cos\frac{\pi}{4} - \text{i}\,\text{sen}\frac{\pi}{4}\right)^2 \left(\cos\frac{\pi}{3} + \text{i}\,\text{sen}\frac{\pi}{3}\right)^3}{\left(\cos\frac{\pi}{24} - \text{i}\,\text{sen}\frac{\pi}{24}\right)^4}$.

(a) (i) Halle el módulo de z.

(ii) Halle el argumento de z y exprese su respuesta en radianes. *[4 puntos]*

(b) Use el Teorema de De Moivre para mostrar que z es una raíz cúbica de la unidad, es decir $z = \sqrt[3]{1}$. *[2 puntos]*

(c) Simplifique $(1+2z)(2+z^2)$ y exprese su respuesta en la forma $a + b\text{i}$, donde a y b son números reales **exactos**. *[5 puntos]*

3. *[Puntuación máxima: 14]*

(a) En los mismos ejes, trace los gráficos de las funciones $f(x)$ y $g(x)$, donde

$f(x) = 4 - (1-x)^2$, para $-2 \le x \le 4$,

$g(x) = \ln(x+3) - 2$, para $-3 \le x \le 5$. *[2 puntos]*

(b) (i) Escriba la ecuación de toda asíntota vertical.

(ii) Escriba las intersecciones de $g(x)$ con el eje x y con el eje y. *[3 puntos]*

(c) Halle los valores de x para los cuales $f(x) = g(x)$. *[2 puntos]*

(d) Sea A la región en la cual $f(x) \ge g(x)$ y $x \ge 0$.

(i) Sombree, en la gráfica, la región A.

(ii) Escriba una integral que represente el área sombreada A.

(iii) Evalúe esta integral. *[4 puntos]*

(e) Halle, en la región A, la distancia vertical máxima entre $f(x)$ y $g(x)$. *[3 puntos]*

4. *[Puntuación máxima: 14]*

(i) Sean los puntos $\mathrm{A}(1, 3, -17)$ y $\mathrm{B}(6, -7, 8)$ que yacen sobre la recta *l*.

(a) Halle una ecuación de la recta *l*, dando su respuesta en forma paramétrica. *[4 puntos]*

(b) El punto P está sobre *l* y es tal que $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ es perpendicular a *l*. Halle las coordenadas de P. *[3 puntos]*

(ii) Sea la ecuación diferencial $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{3y^2 + x^2}{2xy}$, para $x > 0$.

(a) Sustituya $y = vx$ para mostrar que $v + x\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \dfrac{3v^2 + 1}{2v}$. *[3 puntos]*

(b) Partiendo de aquí halle la solución de la ecuación diferencial, sabiendo que $y = 2$ para $x = 1$. *[4 puntos]*

5. *[Puntuación máxima: 15]*

(a) La probabilidad $\mathrm{P}(A)$ de que todos los materiales lleguen puntualmente a una obra en construcción es de 0,85. La probabilidad $\mathrm{P}(B)$ de que el edificio se termine a tiempo es de 0,60. La probabilidad de que los materiales lleguen a tiempo y que el edificio se termine a tiempo es de 0,55.

(i) Muestre que los sucesos A y B **no** son independientes.

(ii) Todos los materiales llegan a tiempo. Halle la probabilidad de que el edificio no sea terminado a tiempo. *[5 puntos]*

(b) Un equipo de diez personas estaba trabajando en el edificio, e incluía tres electricistas y dos plomeros. El arquitecto convocó a una reunión con cinco de las personas del equipo, y eligió al azar a las personas que debían asistir. Calcule la probabilidad de que sean llamados a la reunión **exactamente dos** electricistas y **un** plomero. *[2 puntos]*

(c) El número de horas semanales que trabajan los integrantes del equipo tiene distribución normal, con una media de 42 horas. El 10 % del equipo trabaja 48 o más horas por semana. Halle la probabilidad de que **ambos** plomeros hayan trabajado más de 40 horas durante una semana determinada. *[8 puntos]*

SECCIÓN B

*Conteste **una** pregunta de esta sección.*

Estadística

6. *[Puntuación máxima: 30]*

*Indique sus respuestas con **cuatro** cifras significativas.*

(i) Una máquina produce tela con algunos defectos menores. El número de defectos por metro es una variable aleatoria con distribución de Poisson y media 3. Calcule la probabilidad de que un metro de tela contenga cinco o más defectos. *[4 puntos]*

(ii) A continuación, una muestra aleatoria de 16 medidas de la densidad del aluminio. Puede suponer que las medidas tienen distribución normal.

2,704	2,709	2,711	2,706
2,708	2,705	2,709	2,701
2,705	2,707	2,710	2,700
2,703	2,699	2,702	2,701

Construya un intervalo de confianza del 95% para la densidad del aluminio; muestre todos los pasos claramente. *[6 puntos]*

(iii) Se arroja un dado 120 veces con los siguientes resultados.

puntuación	1	2	3	4	5	6
frecuencia	27	12	16	25	26	14

(a) Pruebe si el dado es bueno mostrando claramente todos los pasos

(i) a nivel de significación 5%.

(ii) a nivel de significación 1%. *[7 puntos]*

(b) Explique qué quiere decir "nivel de significación" en la parte (a). *[3 puntos]*

(iv) Una socióloga desea saber si el porcentaje de hijos varones que adoptan la misma profesión que sus padres es el mismo en todas las profesiones. Decide investigar la situación en cada una de cuatro profesiones. Obtuvo los datos que siguen:

63 de 136 hijos varones de doctores varones en medicina se hicieron médicos
42 de 118 hijos varones de ingenieros varones se hicieron ingenieros
35 de 96 hijos varones de abogados varones se hicieron abogados
68 de 150 hijos varones de empresarios varones se hicieron empresarios

A nivel de significación 5%, ¿a qué conclusión debe llegar? *[10 puntos]*

Conjuntos, relaciones y grupos

7. *[Puntuación máxima: 30]*

(i) Sea $(\mathbb{Z}_4, +)$ el grupo de elementos 0, 1, 2, 3, con la operación de suma de los enteros módulo 4. Sea $(G, *)$ otro grupo de orden cuatro, con elementos a, b, c, d. Sea Φ un isomorfismo de $(\mathbb{Z}_4, +)$ en $(G, *)$, definido de la manera siguiente:

$$\Phi(0) = b, \Phi(1) = d, \Phi(2) = a, \Phi(3) = c.$$

(a) Escriba la tabla del grupo para $(\mathbb{Z}_4, +)$. *[1 punto]*

(b) A partir de ello, escriba la tabla del grupo para $(G, *)$. *[4 puntos]*

(ii) Sea Y el conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.
Defina la relación R sobre Y como $aRb \Leftrightarrow a^2 - b^2 \equiv 0 (\text{mod} 5)$, donde $a, b \in Y$.

(a) Muestre que R es una relación de equivalencia. *[4 puntos]*

(b) (i) ¿Qué significa "la clase de equivalencia que contiene a"?

(ii) Escriba todas las clases de equivalencia. *[5 puntos]*

(iii) Sea X un conjunto que contiene n elementos (donde n es un entero positivo). Muestre que el conjunto de todos los subconjuntos de X contiene 2^n elementos. *[6 puntos]*

(iv) Sea $(S, \circ)$ el grupo de todas las permutaciones de cuatro elementos a, b, c, d. La permutación que aplica a en c, b en d, c en a y d en b se representa por $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & d & a & b \end{pmatrix}$.

El elemento identidad se representa por $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$.

Observe que AB denota la permutación obtenida cuando la permutación B es seguida por la permutación A.

(a) Halle la inversa de la permutación $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & a & d & b \end{pmatrix}$. *[1 punto]*

(b) Halle un subgrupo de S de orden 2. *[2 puntos]*

(c) Halle un subgrupo de S de orden 4, mostrando que es un subgrupo de S. *[7 puntos]*

Matemáticas discretas

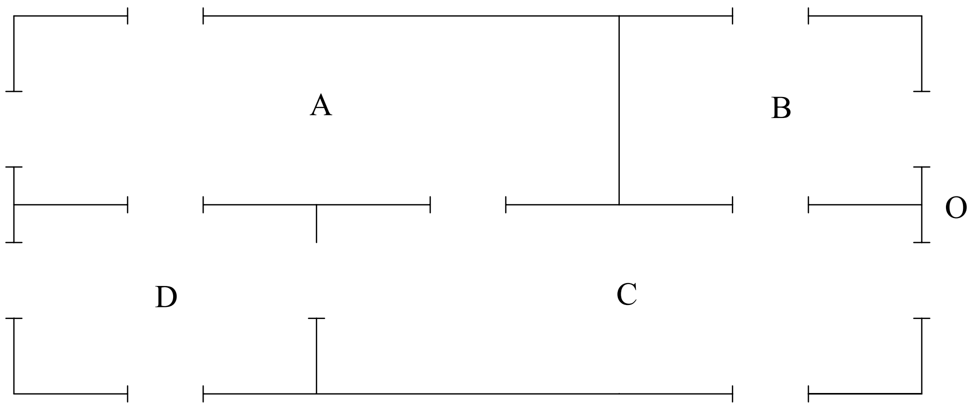
8. *[Puntuación máxima: 30]*

(i) (a) Explique cómo usar el algoritmo de Euclides para obtener el máximo común divisor (mcd) de dos enteros positivos a, b cuando $b < a$. *[3 puntos]*

(b) Sea d el mcd de 364 y de 154. Utilice el algoritmo de Euclides para hallar d, y a partir de ello halle enteros x e y tales que $d = 364x + 154y$. *[5 puntos]*

(ii) Resuelva la relación de recurrencia $y_{n+2} - 2y_{n+1} - 2y_n = 0$, donde $y_1 = 1$, $y_2 = 3$, y $n \in \mathbb{Z}^+$. *[5 puntos]*

(iii) A continuación, el plano de planta de un cierto edificio. Hay cuatro habitaciones, A, B, C y D, y se muestran las puertas entre las habitaciones y hacia el exterior O.



(a) Dibuje un grafo asociando un vértice a cada habitación, utilizando las letras A, B, C, D y O. Si hay una puerta entre las dos habitaciones, dibuje una arista que una los dos vértices correspondientes. *[2 puntos]*

(b) ¿Tiene el grafo de la parte (a) un sendero euleriano? Razone su respuesta. ¿Qué significa su respuesta en cuanto al plano de planta? *[4 puntos]*

(c) ¿Tiene el grafo de la parte (a) un ciclo hamiltoniano? Indique una razón de su respuesta. ¿Qué significa su respuesta en cuanto al plano de planta? *[4 puntos]*

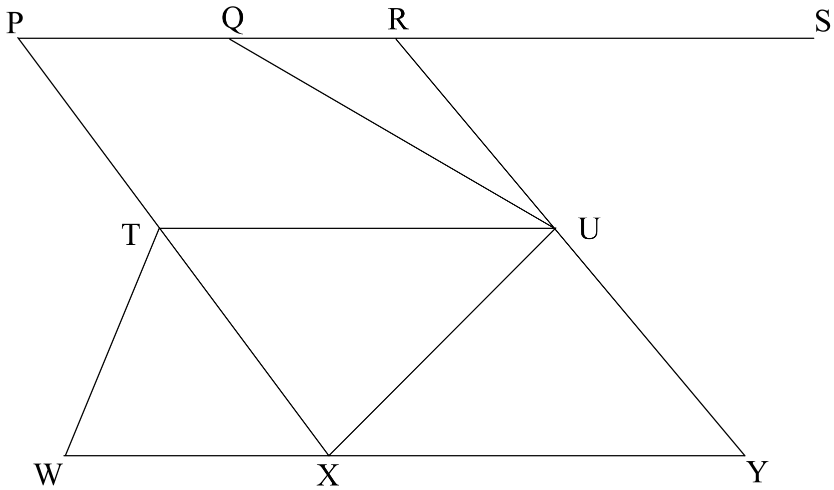
(iv) Sea $T = (V, E)$ un árbol T, donde V es el conjunto de los vértices y E el conjunto de las aristas. Muestre que $|V| = |E| + 1$, es decir, que el número de vértices es superior en una unidad al número de aristas. *[2 puntos]*

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 8: continuación)

(v) (a) Describa el primero la profundidad de búsqueda. *[3 puntos]*

(b) En la figura se muestra un grafo *M*.



Use el primero la profundidad de búsqueda para hallar y trazar un árbol de extensión de *M* a partir del vértice P. *[2 puntos]*

Aproximación y análisis

9. *[Puntuación máxima: 30]*

(i) Sea la ecuación $\tan x - 1 = 0$.

(a) Muestre que tiene soluciones de la forma $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, donde k es cualquier entero. *[1 punto]*

(b) Se debe usar el método de Newton-Raphson para hallar una solución adecuada de la ecuación, comenzando por $x = 1$.

(i) Enuncie dos condiciones que le permiten llegar a la conclusión de que la secuencia converge a $\frac{\pi}{4}$.

(ii) Partiendo de aquí o de otra manera, halle π aproximado con 5 cifras decimales. *[8 puntos]*

(ii) Sea $f(x) = 2 + \cos x,\ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

(a) Muestre que el corta superior de $\left| f^{(4)}(x) \right|$ es 1, donde $f^{(4)}(x)$ es la derivada cuarta de f con respecto a x. *[1 punto]*

Sea A el área encerrada por la gráfica de $f(x)$, los ejes y $x = \frac{\pi}{2}$.

(b) Muestre que $A = 1 + \pi$. *[2 puntos]*

(c) (i) Use la regla de Simpson con 10 subdivisiones para calcular un valor aproximado de A. Exprese su respuesta con la forma $k\pi$, donde $k \in \mathbb{R}^+$ y k tiene **seis** cifras decimales correctas.

(ii) Dado que $\pi \leq 4$, demuestre la siguiente desigualdad.

$$\left| 1 + \pi - k\pi \right| \leq \left(\frac{4}{20} \right)^4 \left(\frac{4}{2} \right) \left(\frac{1}{180} \right).$$

(iii) A partir de aquí, halle un límite superior e inferior de π.

(iv) A partir de aquí, y con la mayor exactitud posible, indique una aproximación de π. *[11 puntos]*

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 9: continuación)

(iii) Sea la secuencia de sumas parciales $\{S_n\}$ dada por

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, \; n = 1, 2, \ldots$$

(a) Muestre que para todos los enteros positivos n, $S_{2n} \geq S_n + \frac{1}{2}$. *[2 puntos]*

(b) A partir de aquí, muestre que la sucesión $\{S_n\}$ no es convergente. *[5 puntos]*

Geometría euclídea y secciones cónicas

10. *[Puntuación máxima: 30]*

(i) La ecuación de una cónica está dada por $4x^2 - 9x + y - 5 = 0$.

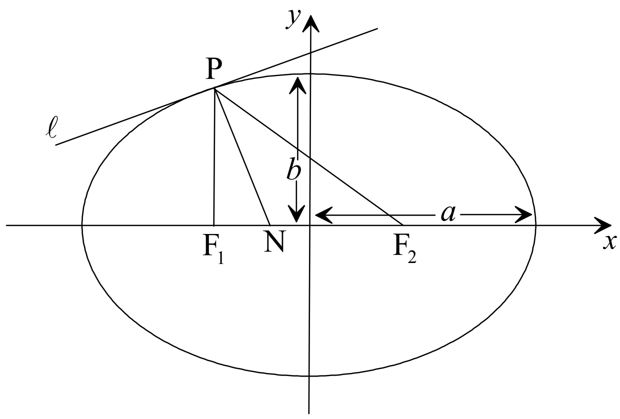
(a) ¿Cuál sección cónica se describe por esta ecuación? Justifique su respuesta. *[3 puntos]*

(b) Sea $y = mx + c$ la ecuación de la tangente a la cónica. Halle una relación entre m y c. *[5 puntos]*

(ii) (a) Enuncie el teorema de Ceva y su recíproco (o su corolario). *[4 puntos]*

(b) Use el teorema de Ceva para demostrar que las bisectrices internas de los ángulos de un triángulo son concurrentes. *[5 puntos]*

(iii) Las ecuaciones paramétricas de una elipse de focos F_1 y F_2 son $x = a\cos\theta$ e $y = b\,\text{sen}\,\theta$ donde $a, b \in \mathbb{R}^+$ y $a > b$. En la figura siguiente se muestra la tangente ℓ a la elipse en el punto P. La recta (PN) es perpendicular a ℓ y corta al eje de las x en N.



Dé las respuestas a las partes (a), (b) y (c) en función de θ.

(a) Halle las coordenadas del punto N. *[5 puntos]*

(b) Halle PF_1 y PF_2. *[3 puntos]*

(c) Halle NF_1 y NF_2. *[2 puntos]*

(d) Demuestre que (PN) biseca al ángulo $F_1\hat{P}F_2$. *[3 puntos]*