INTERNATIONAL BACCALAUREATE
BACCALAURÉAT INTERNATIONAL
BACHILLERATO INTERNACIONAL

N00/510/H(2)S

MATEMÁTICAS
NIVEL SUPERIOR
PRUEBA 2

Viernes 3 de noviembre del 2000 (mañana)

3 horas

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste todas las cinco preguntas de la Sección A y una pregunta de la Sección B.
- A menos que se especifique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deben expresarse en forma exacta, o con tres cifras significativas, según sea más apropiado.

- Escriba la marca y el modelo de su calculadora en la portada de su cuadernillo de respuestas (p. ej., Casio *fx-7400G*, Sharp EL-9400, Texas Instruments TI-80).

Se aconseja que empiece una página nueva para cada respuesta. Una respuesta correcta **sin** *indicación del método utilizado no recibirá normalmente* **ningún** *punto. Se recomienda por lo tanto que muestre sus cálculos. Cuando deba utilizar gráficas de una calculadora de pantalla gráfica para hallar soluciones, deberá dibujar esas gráficas en su respuesta.*

SECCIÓN A

Conteste las **cinco** *preguntas de esta sección.*

1. *[Puntuación máxima: 14]*

(a) Trace de forma aproximada las gráficas siguientes identificando cada una

$y = x^2$ con $-2 \le x \le 2$, e $y = -\frac{1}{2}\ln x$ con $0 < x \le 2$. *[2 puntos]*

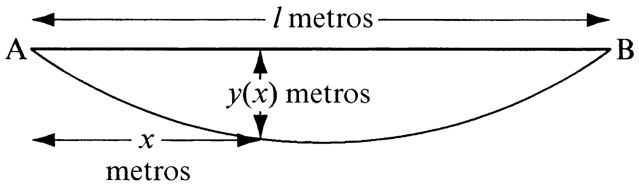
(b) Halle la abscisa de P, punto de intersección de las dos curvas. *[2 puntos]*

(c) Si las tangentes a las curvas en P cortan al eje Oy en Q y R, calcule el área del triángulo PQR. *[6 puntos]*

(d) Demuestre que las dos tangentes a cada curva en los puntos donde $x = a$, $a > 0$ son siempre perpendiculares. *[4 puntos]*

2. *[Puntuación máxima: 10]*

Una vara uniforme de longitud l metros se coloca apoyando sus extremos en dos soportes A, B que están en la misma horizontal.



Si $y(x)$ metros representa la flecha (es decir, la distancia por debajo de [AB]) a una distancia x metros del soporte A, se sabe que

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{125l^3}(x^2 - lx).$$

(a) (i) Sea $z = \frac{1}{125l^3}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{lx^2}{2}\right) + \frac{1}{1500}$. Demuestre que $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{125l^3}\left(x^2 - lx\right)$.

(ii) Dado que $\frac{dw}{dx} = z$ y $w(0) = 0$, halle $w(x)$.

(iii) Demuestre que w satisface $\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{1}{125l^3}(x^2 - lx)$, y que $w(l) = w(0) = 0$. *[8 puntos]*

(b) Halle la flecha en el centro de una vara de longitud 2,4 metros. *[2 puntos]*

3. *[Puntuación máxima: 16]*

(i) Un satélite depende para su energía células solares y será operativo mientras que al menos una de las células funcione. Las células fallan de forma independiente unas de otras y la probabilidad de que una célula falle dentro de un año es 0,8.

(a) En el caso de un satélite con diez células solares, halle la probabilidad de que todas las diez células fallen dentro de un año. *[2 puntos]*

(b) En el caso de un satélite con diez células solares, halle la probabilidad de que el satélite siga operando al final de un año. *[2 puntos]*

(c) En el caso de un satélite con n células solares halle la probabilidad de que el satélite siga operando al final de un año. Partiendo de aquí, halle el menor número de células solares necesarias para que la probabilidad de que el satélite siga operando al final de un año sea al menos 0,95. *[5 puntos]*

(ii) La vida de cierta componente de una célula solar es de Y años, siendo Y una variable aleatoria continua que tiene por función de densidad de probabilidad

$$f(y) = \begin{cases} 0 & \text{cuando } y < 0 \\ 0,5\mathrm{e}^{-y/2} & \text{cuando } y \geq 0. \end{cases}$$

(a) Halle la probabilidad, aproximando con cuatro cifras significativas, de que una componente dada falle dentro de un semestre. *[3 puntos]*

Cada célula solar tiene tres de esas componentes que operan de forma independiente y la célula continuará funcionando si por lo menos dos de las componentes siguen funcionando.

(b) Halle la probabilidad de que una célula solar falle dentro un semestre. *[4 puntos]*

4. *[Puntuación máxima: 13]*

(i) (a) Dadas las matrices $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ tales que $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{C}$ y $\det \boldsymbol{A} \neq 0$, exprese $\boldsymbol{B}$ en función de $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{C}$. *[2 puntos]*

(b) Sea $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} -4 & 13 & -7 \\ -2 & 7 & -4 \\ 3 & -9 & 5 \end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix}$.

(i) Halle la matriz $\boldsymbol{DA}$;

(ii) Halle $\boldsymbol{B}$ si $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{C}$. *[3 puntos]*

(c) Halle las coordenadas del punto de intersección de los planos $x + 2y + 3z = 5$, $2x - y + 2z = 7$ y $3x - 3y + 2z = 10$. *[2 puntos]*

(ii) (a) Si $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$ y $\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$, demuestre que

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = 7\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} - 5\boldsymbol{k}.$$ *[2 puntos]*

(b) Sea $\boldsymbol{w} = \lambda\boldsymbol{u} + \mu\boldsymbol{v}$ con λ y μ escalares. Demuestre que $\boldsymbol{w}$ es perpendicular a la recta de intersección de los planos $x + 2y + 3z = 5$ y $2x - y + 2z = 7$ para todos los valores de λ y μ. *[4 puntos]*

5. *[Puntuación máxima: 17]*

(a) Sea $y = \dfrac{a + b \text{ sen } x}{b + a \text{ sen } x}$, donde $0 < a < b$.

(i) Demuestre que $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{(b^2 - a^2) \cos x}{(b + a \text{ sen } x)^2}$. *[4 puntos]*

(ii) Halle los valores máximos y mínimos que puede tener y. *[4 puntos]*

(iii) Demuestre que la gráfica de $y = \dfrac{a + b \text{ sen } x}{b + a \text{ sen } x}$, $0 < a < b$ no puede tener una asíntota vertical. *[2 puntos]*

(b) Estudiemos la gráfica de $y = \dfrac{4 + 5 \text{ sen } x}{5 + 4 \text{ sen } x}$ con $0 \le x \le 2\pi$,

(i) halle la ordenada de la intersección con el eje Oy ;

(ii) halle las abscisas de las intersecciones con el eje Ox m y n, (donde $m < n$) aproximando con cuatro cifras significativas;

(iii) dibuje la gráfica. *[5 puntos]*

(c) El área encerrada por la gráfica de $y = \dfrac{4 + 5 \text{ sen } x}{5 + 4 \text{ sen } x}$ y el eje Ox desde $x = 0$ hasta $x = n$ queda indicada por A. Escriba, pero **no** calcule, una expresión para el área A. *[2 puntos]*

SECCIÓN B

*Conteste **una** pregunta de esta sección.*

Estadística

6. *[Puntuación máxima: 30]*

(i) La distribución de las longitudes de las varas producidas por una máquina es normal con media 100 cm y desviación típica 15 cm.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que una vara elegida al azar tenga una longitud de 105 cm o superior? *[2 puntos]*

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que la longitud media de un conjunto de 60 varas de este tipo elegidas al azar sea de 105 cm o superior? *[3 puntos]*

(ii) En un estudio para determinar si están relacionados el consumo de alcohol con el de la nicotina, se ha llevado a cabo la revisión de 452 mujeres. Los siguientes datos representan el consumo de alcohol y la inhalación de nicotina diarios.

	Nicotina (miligramos/día)		
Alcohol (cl/día)	Nada	1–15	16 o más
Niguno	105	7	11
0,30–3,00	58	5	13
3,10–30,00	84	37	42
más de 30	57	16	17

Investigar si el consumo de alcohol y de nicotina están correlacionados. Use una prueba de significación al nivel 5% en su análisis y explique todos sus pasos y conclusiones. *[9 puntos]*

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 6: continuación)

(iii) Unos científicos han desarrollado cierto tipo de maíz con una calidad de proteína que puede ayudar a los pollos a ganar peso más rápidamente que con el presente tipo usado hasta ahora. Para someter a prueba este nuevo tipo, se proporcionó una ración que contenía este tipo de maíz a 20 pollos de un día de edad, mientras que se dio el maíz usual a otro grupo de control de 20 pollos. Los siguientes datos representan los aumentos de peso en gramos, para cada grupo, pasadas tres semanas.

Grupo con el maíz normal (A)				Grupo con el nuevo maíz (B)			
380	321	366	356	361	447	401	375
283	349	402	462	434	403	393	426
356	410	329	399	406	318	467	407
350	384	316	272	427	420	470	392
345	455	360	431	430	339	410	326

(a) Los científicos desean investigar la suposición de que el Grupo B aumenta de peso más rápidamente que el Grupo A. Compruebe esta suposición al nivel de significación del 5%, haciendo notar qué prueba de hipótesis está usted usando. Puede dar por supuesto que los aumentos de peso se distribuyen normalmente en cada grupo, con la misma varianza y son independientes uno de otro. *[6 puntos]*

(b) Los datos de las dos muestras anteriores se han combinado para formar un solo conjunto de datos. La siguiente tabla de frecuencias nos da las frecuencias observadas en el ejemplo combinado. Se han divido los datos en cinco intervalos.

Aumento de peso	Observado
271–310	2
311–350	9
351–390	8
391–430	15
431–470	6

Haga una prueba al nivel del 5% de si los datos combinados pueden considerarse como una muestra de una población normal con una media de 380 . *[10 puntos]*

Conjuntos, relaciones y grupos

7. *[Puntuación máxima: 30]*

(i) $A–B$ es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a A pero no a B.

(a) Mediante diagramas de Venn compruebe que $(A-B)\cup(B-A)=(A\cup B)-(A\cap B)$. *[2 puntos]*

(b) Mediante las leyes de De Morgan pruebe que $(A-B)\cup(B-A)=(A\cup B)-(A\cap B)$. *[4 puntos]*

(ii) Demuestre que el conjunto $H=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; a=\pm 1,\ \text{y } b\in\mathbb{Z}\right\}$ forma grupo mediante la multiplicación de matrices. (Puede dar por demostrado que la multiplicación de matrices es asociativa.) *[6 puntos]*

(iii) (a) Enucie el teorema de Lagrange.

(b) Sea $(G, \circ)$ un grupo de orden 24 con elemento identidad e. Sea $a\in G$, y supongamos que $a^{12}\neq e$ y $a^{8}\neq e$. Demuestre que $(G, \circ)$ es un grupo cíclico con generador a. *[7 puntos]*

(iv) Sea Let $S=\left\{x \mid x=a+b\sqrt{2}\,;\ a, b\in\mathbb{Q},\ a^2-2b^2\neq 0\right\}$.

(a) Demuestre que S forma un grupo mediante la multiplicación, $\times$, de números.

(b) Para $x=a+b\sqrt{2}$, defina $f(x)=a-b\sqrt{2}$. Demuestre que f es un isomorfismo de $(S, \times)$ en $(S, \times)$. *[11 puntos]*

Matemáticas discretas

8. *[Puntuación máxima: 30]*

(i) Dada la ecuación en diferencias $c_{n+2} = -8c_{n+1} - 16c_n$, $c_1 = -1$, $c_2 = 8$, $n \in \mathbb{Z}^+$

(a) escriba los cinco primeros términos de la sucesión; *[2 puntos]*

(b) escriba el polinomio característico y halle sus soluciones; *[2 puntos]*

(c) partiendo de aquí, halle la solución de la ecuación en diferencias. *[4 puntos]*

(ii) (a) Use el algoritmo de Euclides para demostrar que para $n \in \mathbb{N}$, $(8n + 3)$ y $(5n + 2)$ son primos entre sí. *[4 puntos]*

(b) Cualquier entero a de $(n + 1)$ cifras puede escribirse como $a = 10^n r_n + 10^{n-1} r_{n-1} + \ldots + 10r_1 + r_0$, con $0 \le r_i \le 9$ donde $0 \le i \le n$, y $r_n \ne 0$.

(i) Demuestre que $a \equiv (r_0 + r_1 + \ldots + r_n) \bmod 3$. *[3 puntos]*

(ii) Partiendo de aquí o de otro modo, halle todos los valores de la cifra x tales que el número $a = 137486x225$ sea múltiplo de 3 . *[6 puntos]*

(iii) Sea $G = (V, A)$ un grafo planar conexo con v vértices y a aristas, en el que cada ciclo tiene longitud al menos l.

(a) Use el teorema de Euler y el hecho de que el grado de cada cara es la longitud del ciclo que la encierra para probar que

$$a \le \frac{l}{l-2}(v-2) .$$ *[5 puntos]*

(b) Halle la mínima longitud de ciclo en un grafo $\kappa_{3,3}$ y úsela para demonstrar que el grafo no es planario. *[4 puntos]*

Aproximación y análisis

9. *[Puntuación máxima: 30]*

Sea f la función $f(x) = (x^2 - 1)e^{kx}$, k, $x \in \mathbb{R}$, y $k \neq 0$.

(a) (i) Demuestre que $f(x)$ tiene exactamente dos ceros. *[2 puntos]*

(ii) Demuestre que $f'(x)$ puede tener solamente dos ceros, y demuestre que el producto de estos dos ceros es -1 . *[5 puntos]*

(b) (i) Dando a k el valor 2, dibuje la gráfica de $f(x)$, señalando las intersecciones de la gráfica con los ejes Ox y Oy y dé con exactitud las coordenadas de sus puntos mínimo y máximo locales. *[4 puntos]*

(ii) Comenzado con $x_0 = 1$, use el método de Newton-Raphson para hallar la abscisa del punto de intersección de $f(x) = (x^2 - 1)\, e^{2x}$ y $g(x) = e$. Dé la respuesta con una aproximación de **cinco** decimales. *[6 puntos]*

(iii) Halle el desarrollo en serie de Maclaurin de e^{kx} hasta el término en x^3. *[4 puntos]*

(iv) Partiendo de aquí halle el desarrollo en serie de $f(x) = (x^2 - 1)e^{2x}$ hasta el término en x^3. *[3 puntos]*

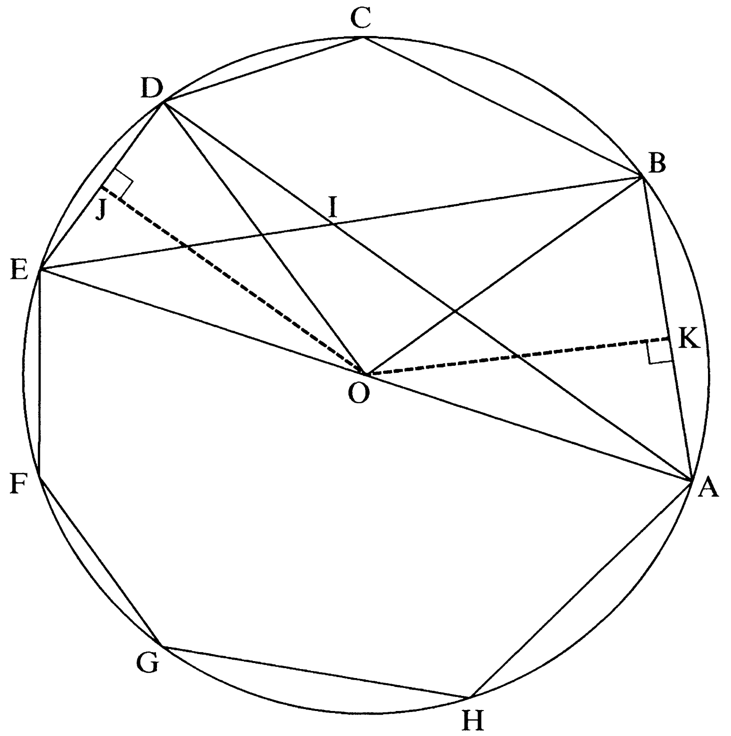
(c) Use la regla del trapecio con cuatros intervalos iguales para estimar el área encerrada entre las gráficas de $f(x) = (x^2 - 1)e^{kx}$ y $h(x) = e^{kx}$. *[6 puntos]*

Geometría euclídea y secciones cónicas

10. *[Puntuación máxima: 30]*

(i) Un octógono ABCDEFGH está inscrito en un círculo de centro O, tal como se muestra.

(Figura no dibujada a escala)



K y J son los pies de las perpendiculares desde O a los lados [AB] y [DE] respectivamente.

Sea AB = BC = GH = HA = 3 unidades, y CD = DE = EF = FG = 2 unidades.

(a) Demuestre que E, O y A están alineados. *[2 puntos]*

(b) Demuestre que $\text{OK} = \frac{1}{2}\text{EB}$ y $\text{OJ} = \frac{1}{2}\text{AD}$. *[4 puntos]*

(c) Demuestre que $\triangle\text{DCB}$ es congruente con $\triangle\text{DIB}$. *[4 puntos]*

(d) Demuestre que $\triangle\text{IBA}$ y $\triangle\text{DIE}$ son ambos isósceles y rectángulos. *[3 puntos]*

(e) Demuestre que $\text{AI} = 3\sqrt{2}$ y $\text{EI} = 2\sqrt{2}$. *[2 puntos]*

(f) Exprese el área del octógono de la forma $r + s\sqrt{2}$ siendo s y r números enteros. *[5 puntos]*

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 10: continuación)

(ii) Considere los puntos P(–3, 9) y Q(1, 3) del plano de coordenadas.

(a) Halle la ecuación del círculo de diámetro [PQ]. *[3 puntos]*

(b) Demuestre que el lugar geométrico de los puntos M, tales que MP = 3 MQ, es un círculo. Halle el centro y el radio. *[4 puntos]*

(c) Sean R y S los puntos de intersección de (PQ) con el nuevo círculo del apartado (b). Demuestre que los puntos P, Q, R, y S forman una cuaterna armónica. *[3 puntos]*