AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS
NIVEL MEDIO
PRUEBA 2

Martes 22 de noviembre de 2005 (mañana)

2 horas

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste todas las preguntas.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o con tres cifras significativas.

Empiece una página nueva para cada respuesta. Se recomienda que muestre todos los cálculos, siempre que sea posible. Cuando la respuesta sea incorrecta se otorgarán algunos puntos siempre que aparezca el método empleado y éste sea correcto. Para los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el proceso seguido hasta su obtención. Por ejemplo, cuando deba utilizar gráficas de una calculadora de pantalla gráfica para hallar soluciones, deberá dibujar esas gráficas en su respuesta.

1. *[Puntuación máxima: 20]*

(i) Se ha registrado el número de accidentes que se produce cada semana en una carretera con gran densidad de tráfico durante un período de 260 semanas, obteniéndose los siguientes resultados.

Número de accidentes	0	1	2	3	4	5
Número de semanas	77	90	55	30	5	3

(a) Escriba tres supuestos para que estos datos sigan el modelo de una distribución de Poisson. *[3 puntos]*

(b) Compruebe la bondad del ajuste de la distribución de Poisson a un nivel de significación del 5%. *[10 puntos]*

(ii) Se pretende comparar la eficacia de dos compiladores de programación, para lo cual se ejecutan 25 aplicaciones seleccionadas al azar mediante cada uno de los compiladores. La siguiente tabla muestra la diferencia entre el tiempo que le lleva a cada uno, es decir, el tiempo que le lleva al compilador I menos el tiempo que le lleva al compilador II.

Aplicación	Diferencia	Aplicación	Diferencia
1	–0,52	14	–0,23
2	0,89	15	0,06
3	1,36	16	0,75
4	–0,15	17	–0,58
5	–0,21	18	0,7
6	0,27	19	0,49
7	0,85	20	1,67
8	–0,56	21	–0,3
9	–0,6	22	0,27
10	0,15	23	1,23
11	0,85	24	1,1
12	0,27	25	0,28
13	1,27		

Se afirma que el segundo compilador es el más rápido de los dos.

(a) Escriba la hipótesis nula y la hipótesis alternativa que apoyen esta afirmación. *[1 punto]*

(b) (i) Halle la región crítica para probar H_0 al nivel de significación del 5%.

(ii) Escriba su conclusión. *[6 puntos]*

2. *[Puntuación máxima: 18]*

(i) El grupo abeliano $(G, \otimes)$, con elemento neutro e, contiene dos subgrupos $(S, \otimes)$ y $(T, \otimes)$, donde $S = \{e, a, a^2, a^3\}$, $T = \{e, b, b^2\}$ y $S \cap T = \{e\}$.

(a) Halle el orden mínimo de G. *[2 puntos]*

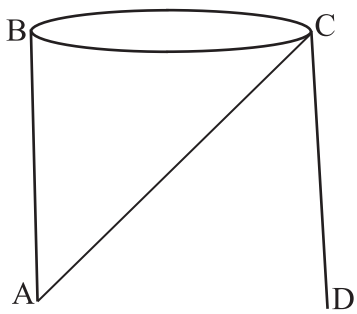
(b) Con este orden mínimo de G, compruebe que $(G, \otimes)$ es un grupo cíclico y halle todos los generadores posibles. *[6 puntos]*

(ii) (a) En el grupo M de las matrices **regulares** de orden 2×2, compruebe que $H = \left\{\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}\right\}$ es un subgrupo de M para el producto de matrices. *[5 puntos]*

(b) Compruebe que H es isomorfo al grupo $\mathbb{R}$ de los números reales para la adición. *[5 puntos]*

3. *[Puntuación máxima: 17]*

(i) El siguiente grafo tiene vértices A, B, C, D.



(a) Halle la matriz de adyacencia $\boldsymbol{T}$. *[2 puntos]*

(b) (i) Halle la matriz $\boldsymbol{T}^2$ y explique qué representan los elementos de esta matriz.

(ii) Halle la matriz $\boldsymbol{T} + \boldsymbol{T}^2$ y explique qué representan los elementos de esta matriz. *[4 puntos]*

(ii) (a) Sea $a_n = pa_{n-1} + qa_{n-2}$, para $n > 1$, una ecuación en diferencias de segundo orden, donde p y q son constantes. Sabiendo que r es una raíz múltiple de la ecuación $x^2 - px - q = 0$, compruebe que $a_n = Ar^n + Bnr^n$ es una solución de la ecuación en diferencias dada para todo A y B. *[6 puntos]*

(b) Resuelva la ecuación $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$, para $n > 1$, con $a_0 = 2$ y $a_1 = 3$. *[5 puntos]*

4. *[Puntuación máxima: 22]*

(i) El polinomio de Taylor de grado 3 del desarrollo de $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ cuando $x = 1$ se puede escribir como

$$P_3(x) = \operatorname{sen} 1 + (\cos 1) \times (x-1) - (\operatorname{sen} 1) \times \frac{(x-1)^2}{2} - (\cos 1) \times \frac{(x-1)^3}{6}.$$

(a) Utilice este polinomio para aproximar la integral $\int_{0,4}^{1,6} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \mathrm{d}x$. *[2 puntos]*

(b) Utilice la regla de Simpson con seis subintervalos para hallar $\int_{0,4}^{1,6} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \mathrm{d}x$ con cinco cifras decimales. *[4 puntos]*

(ii) Halle todos los valores de x para los que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{\mathrm{e}^{nx}}$ es convergente. *[6 puntos]*

(iii) El siguiente desarrollo en serie de Maclaurin de una función $g(x)$ converge para $|x| < 1$.

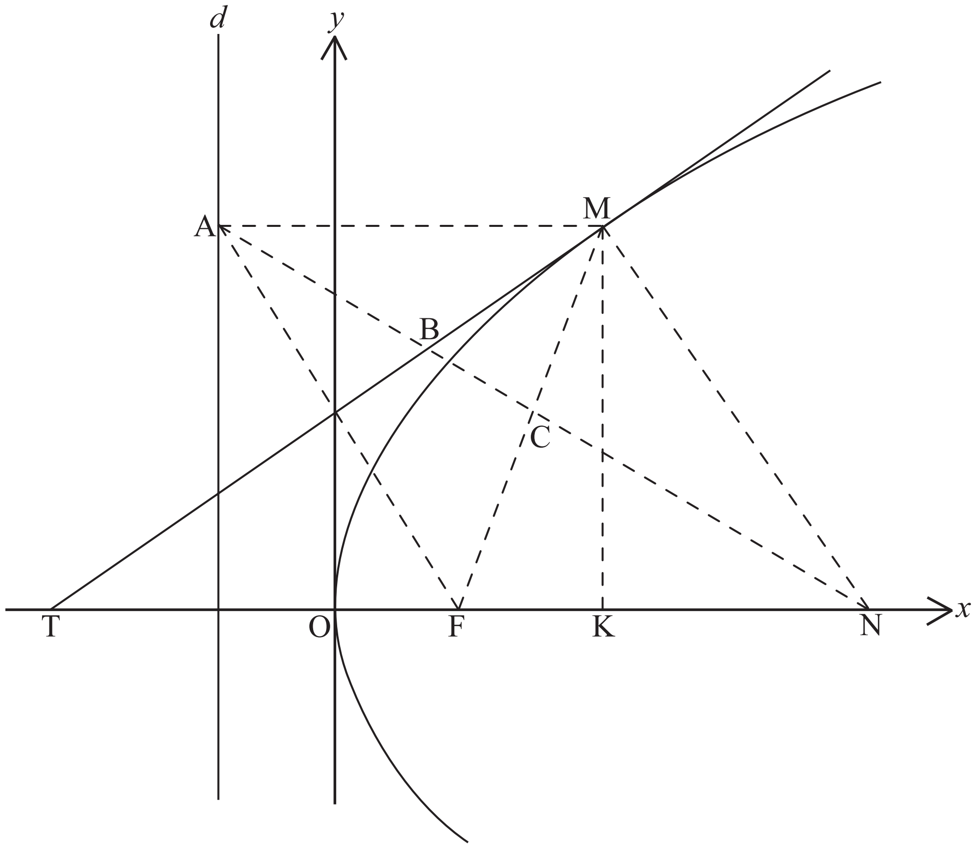
$$x + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{x^{4n-3}}{4n-3} + \ldots$$

(a) Halle el desarrollo de $g'(x)$ y compruebe que $g'(x) = \frac{1}{1-x^4}$. *[3 puntos]*

(b) Utilizando la descomposición en fracciones simples, o de cualquier otro modo, halle $g(x)$. *[7 puntos]*

5. *[Puntuación máxima: 23]*

El siguiente diagrama muestra una parábola con foco en $F(p, 0)$ y directriz *d*. Sea $M(x_0, y_0)$ un punto cualquiera de la parábola. Los puntos T, N y K están situados sobre el eje *x* de tal modo que MT es tangente a la parábola en M, MN es la normal en M, y MK es perpendicular al eje *x*.



(a) Compruebe que las coordenadas de T son $(-x_0, 0)$. *[6 puntos]*

(b) Compruebe que KN es una constante. *[5 puntos]*

(c) Compruebe que F es el punto medio de [TN]. *[5 puntos]*

(d) La perpendicular a *d* trazada desde M corta a *d* en el punto A, y (AN) corta a (MT) en el punto B y a (MF) en el punto C. Compruebe que la división ACBN es una cuaterna armónica. *[7 puntos]*